

МАТЕМАТИКА

в схемах и таблицах

Алгебра

Линейные уравнения

$ax=b$, где a, b – числа, x – неизвестное	если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ – один корень
	если $a = 0, b \neq 0$, то корней нет
	если $a = 0, b = 0$, то корней бесконечное множество

Способы разложения на множители

1. Вынесение общего множителя за скобки $2ab^2-4a^2c=2a \cdot (b^2-2ac)$
2. Способ группировки $\underline{3a+6b}-\underline{a^2-2ab}=3 \cdot (a+2b)-a(a+2b)=(a+2b)(3-a)$
3. Формулы сокращенного умножения:

Формулы	Примеры
1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$9-x^4=3^2-(x^2)^2=(3-x^2)(3+x^2)$; $(2n-5)(5+2n)=(2n)^2-5^2=4n^2-25$
2. $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$	$(4+3z)^2=16+24z+9z^2$ $25-10y+y^2=5^2-2 \cdot 5 \cdot y+y^2=(5-y)^2$
3. $a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$	$27-a^6=3^3-(a^2)^3=(3-a^2)(9-3a^2+a^4)$ $(4+x)(16-4x+x^2)=4^3+x^3=64+x^3$
4. $(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$	$(2-n)^3=8-12n+6n^2-n^3$ $343+21x^{10}+147x^5+x^{15}=(7+x^5)^3$

Действия с алгебраическими дробями

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, b \neq 0, m \neq 0$

1. $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$	$\frac{x}{y+1} + \frac{2}{y+1} = \frac{x+2}{y+1}$
2. $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$	$\frac{3}{1+x^3} - \frac{x}{1-x^3} = \frac{3-x}{1-x^3}$
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{x}{4} \cdot \frac{8}{(x-1)} = \frac{8x}{4 \cdot (x-1)} = \frac{2x}{x-1}$
4. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + b \cdot m}{mn}$	$\frac{3a}{b} + \frac{7n^2}{a} = \frac{3a^2 + 7bn^2}{ab}$
5. $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n \pm b \cdot m}{mn}$	$\frac{5 \pm x}{3} \pm \frac{x}{2y} = \frac{2y(5 \pm x) \pm 3x}{6y}$

Функция

Переменная величина y называется **функцией** переменной величины x , если каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y .

$y=f(x)$, y – функция, **зависимая переменная**, x – аргумент, **независимая переменная**.

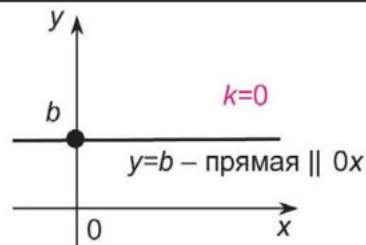
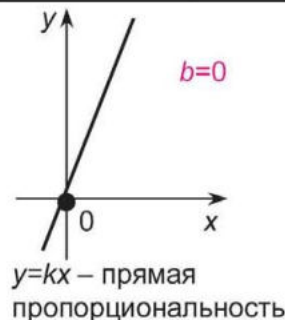
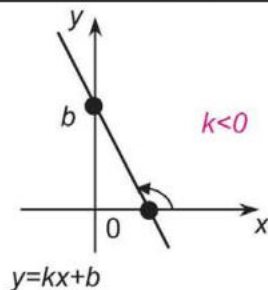
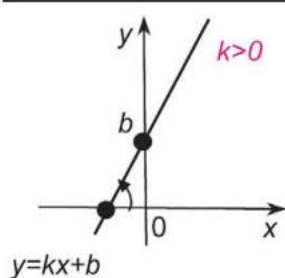
Область определения функции – множество значений x , для которых функция определена. Обозначается: $a(f)$.

Область значений функции – множество значений y , которые она принимает на всей области определения. Обозначается: $b(f)$.

Линейная функция

Функция вида $y=kx+b$, где k, b – числа, называется **линейной функцией**.

Графиком линейной функции является прямая, k – угловой коэффициент, если $k>0$, то угол наклона прямой – острый, если $k<0$, то угол наклона прямой – тупой, b – показывает, в какой точке график пересекает ось ординат.



Исследование линейной функции $y=kx+b$; $k \neq 0, b \neq 0$

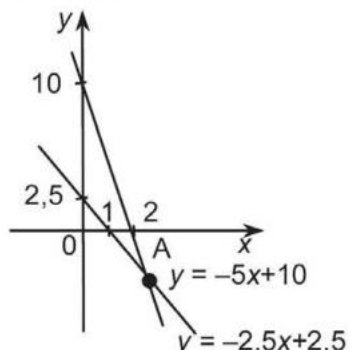
1. О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$	
2. О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$	
3. Нули функции $kx+b=0$; $x = -\frac{b}{k}$	точка пересечения графика функции с осью абсцисс
4. Знакопостоянство: если $k>0$, то если $k<0$, то	$y>0$, если $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$; $y<0$, если $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ $y>0$, если $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$; $y<0$, если $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$
5. Монотонность:	если $k>0$, то $y \uparrow$, при $x \in \mathbb{R}$; если $k<0$, то $y \downarrow$, при $x \in \mathbb{R}$.

Системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}; a_{1,2}; b_{1,2}; c_{1,2} - \text{числа}; x, y - \text{неизвестные}$$

Решить систему уравнений – значит найти все пары чисел (x, y) , являющиеся решением, или установить, что их нет.

Способы решения систем уравнений

Способ подстановки	Способ сложения	Графический способ
$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \pm 3 \\ x + 3(2x \pm 3) = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \pm 3 \\ 7x = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ Ответ: (2; 1)	$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + y = -4 \cdot 5 \end{cases}$ $+ \begin{cases} 2x \pm 5y = 3 \\ 15x + 5y = \pm 20 \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = \pm 17 \\ 3x + y = \pm 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3x \pm 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ Ответ: (-1; -1).	$\begin{cases} 5x + y = 10 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 5x + 10 \\ y = \pm 2,5x + 2,5 \end{cases}$  Ответ: (3; -5)

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $l_1: y=k_1x+b_1$ и $l_2: y=k_2x+b_2$.	
если $k_1=k_2$, $b_1 \neq b_2$, то $l_1 \parallel l_2$ и система $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ решения не имеет	
если $k_1 \neq k_2$, b_1, b_2 – любые, то $l_1 \cap l_2$ и система $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ имеет одно решение	
если $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b_1}{b_2}$, то l_1, l_2 совпадают и система $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.	

Универсальные обозначения

N	множество натуральных чисел. Натуральными числами называются числа, употребляемые при счете. Самое маленькое натуральное число 1. 1; 2; 3; 4; ...; 1000; 1001; 1002; ...
Z	множество целых чисел. Целыми числами называются натуральные числа, им противоположные числа и ноль. 0; ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ...
Q	множество рациональных чисел. Рациональными числами называются числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in Z$.
	иррациональными числами называются бесконечные десятичные непериодические дроби
R	множество действительных чисел. Действительные числа – множество рациональных и иррациональных чисел

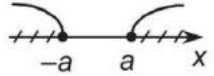
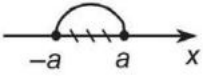
Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

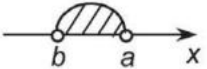
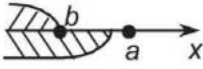
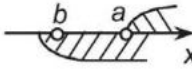
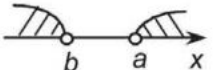
Уравнение $|x|=a$

если $a > 0$	$x_1 = a, x_2 = -a$ – два корня
если $a = 0$	$x = 0$ – один корень
если $a < 0$	то корней нет

Неравенства

$ x \geq a$	$ x \leq a$
если $a > 0$, то $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$  $x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$	если $a > 0$, то $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$  $x \in [-a, a]$
если $a = 0$, то $x = 0$	если $a = 0$, то $x = 0$
если $a < 0$, то $x \in R$	если $a < 0$, то решения нет

Системы линейных неравенств

$\begin{cases} x \leq a \\ x > b \end{cases}$	$b < x \leq a$		$(b; a]$	полуинтервал
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$	$b < x < a$		$(b; a)$	интервал
$\begin{cases} x \geq b \\ x \leq a \end{cases}$	$b \leq x \leq a$		$[b; a]$	отрезок
$\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$			$(-\infty; b]$	луч
$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$			$(a; +\infty)$	интервал
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$			нет решения	

Степень числа

Степенью числа a с натуральным показателем n , больше 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a .

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, a – основание степени, n – показатель степени.

Свойства степени	Примеры
1. $a^1 = a$	$17^1 = 17; \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$5^2 \cdot 5^6 = 5^8$
3. $a^n : a^m = a^{n-m}$	$3^{17} : 3^{15} = 3^2$
4. $(a^n)^m = a^{nm}$	$(2^7)^3 = 2^{21}$
5. $(ab)^n = a^n b^n$	$6^2 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3}$

С целым показателем	Степень с рациональным показателем
$a^n, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0$	$a^p, p \in \mathbb{R}, a \geq 0, p = \frac{m}{n}$ где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$a^{\frac{m}{n}} = 0$, если $a=0, \frac{m}{n} > 0$

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число b , квадрат которого равен a . $\sqrt{a} = b: \begin{cases} 1) b \geq 0 \\ 2) b^2 = a \end{cases}, a \geq 0$

Свойства	Примеры
1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt{225} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$	$\sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$
3. $\sqrt{a^2} = a , a - \text{любое}$	$\sqrt{4x^4} = 2x^2 = 2x^2, x - \text{любое}$
4. $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$	$(\sqrt{7y})^2 = 7y, y \geq 0$

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a . $\sqrt[n]{a} = b: \begin{cases} 1) b \geq 0 \\ 2) b^n = a \end{cases}, a \geq 0$.

Свойства	Примеры
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0$	$\frac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{3125}{5}} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0$	$(\sqrt[5]{4})^3 = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{2^6} = 2$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, a \geq 0$	$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$
5. $(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0$	$(\sqrt[5]{2})^5 = 2$
6. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = a , \text{ где } k \in \mathbb{N}, a - \text{любое}$	$\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Единицы Десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8449	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Квадратные уравнения

Уравнения вида $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$, b , c – числа, x – неизвестное, называется квадратным уравнением.

Уравнения $ax^2=0$; $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$ называются неполными квадратными уравнениями.

Пример:

$$3x^2-7x+1=0;$$

$$a=3; b=-7; c=1$$

$$5x^2=0$$

$$a=5; b=c=0$$

$$-x^2-\frac{1}{3}x=0$$

$$a=-1; b=\pm\frac{1}{3}; c=0$$

$$1,5x^2+9=0$$

$$a=1,5; c=9$$

Решение квадратных уравнений

Уравнения	Примеры	
1) $ax^2=0$; $x_1=0$, один корень	1) $\frac{1}{17}x^2=0$; $x^2=0$; $x=0$	
2) $ax^2+bx=0$; $x \cdot (ax+b)=0$; $\begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$ два корня	2) $-3x^2+5x=0$; $-x(3x-5)=0$; $\begin{cases} -x=0 \\ 3x-5=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1\frac{2}{3} \end{cases}$	
3) $ax^2+c=0$; $x^2=-\frac{c}{a}$ имеет решение, если $-\frac{c}{a}>0$; $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ два корня. Не имеет решений, если $-\frac{c}{a}<0$.	3) $6x^2-9=0$; $x^2=\frac{3}{2}$; $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$; $2x^2+8=0$; $x^2=-4$; решений нет.	
4) $ax^2+bx+c=0$; $D=b^2-4ac$ Если $D>0$, то $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ два корня. Если $D=0$, то $x_1=-\frac{b}{2a}$ один корень. Если $D<0$, то корней нет.	4) $2x^2-x-1=0$; $a=2$; $b=-1$; $c=-1$; $D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot (-1)=9$; $D=9$; $x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}$; $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{2}$. Ответ: 1; $-\frac{1}{2}$.	$9x^2+6x+1=0$; $a=9$; $b=6$; $c=1$; $\frac{D}{4}=3^2-9\cdot 1=0$; $x_1=-\frac{6}{18}$; $x_1=-\frac{1}{3}$. Ответ: $-\frac{1}{3}$.
5) $ax^2+bx+c=0$; если число b четное, то применяем формулу $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$; $x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$	5) $5x^2-7x+10=0$; $a=5$; $b=-7$; $c=10$; $D=(-7)^2-4\cdot 5\cdot 10=-153<0$, корней нет. Ответ: $\emptyset$.	
6) Если старший коэффициент равен 1, то квадратное уравнение называется приведенным $x^2+px+q=0$. По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$	6) $x^2-5x-6=0$; $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -6 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$; $x_1=6$, $x_2=-1$. Ответ: 6; -1.	

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$

Пример: $2x^2 - x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+2) = (2x-5)(x+2)$. Так как $2x^2-x-5=0$; $a=2$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{4}$, $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -2$.

Квадратичная функция

Функция вида $y=ax^2+bx+c$, где $a \neq 0$, b, c – числа; x – независимая переменная, называется квадратичной функцией.

1. $y=x^2$

а) О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$

б) О.З.Ф. $y \in [0; +\infty)$

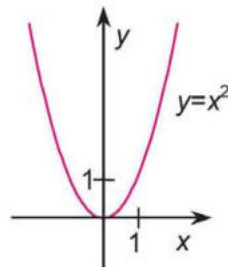
в) нули функции: $x=0$

г) Монотонность функции

$y \uparrow$, если $x \in [0; +\infty)$

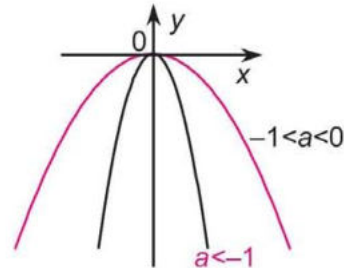
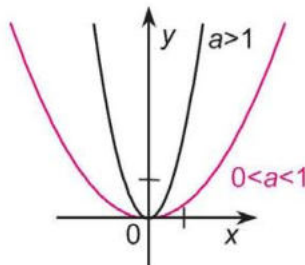
$y \downarrow$, если $x \in (-\infty; 0]$

д) ось симметрии – ось ординат



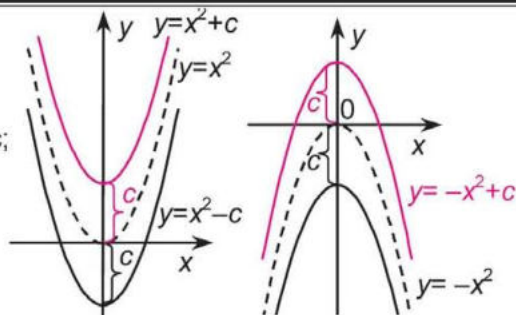
2. $y=ax^2$

Коэффициент a отвечает за сужение параболы вдоль оси ординат; если $|a| < 1$, то ветви расположены дальше от ОУ; если $|a| > 1$, то ветви расположены ближе к ОУ.



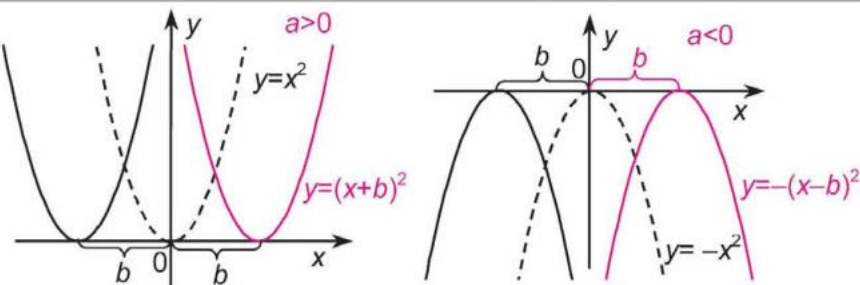
3. $y=x^2+c$

Коэффициент c отвечает за перемещение параболы вдоль оси ординат;
если $c>0$, то график $y=x^2$ поднимается вверх на c ;
если $c<0$, то график $y=x^2$ опускается вниз на c .

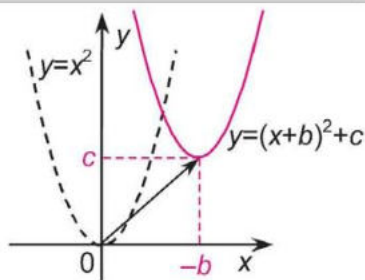


4. $y=(x+b)^2$

Коэффициент b отвечает за перемещение вдоль оси OX ; если $b>0$, то влево на b единиц от 0; если $b<0$, то вправо на b единиц от 0.

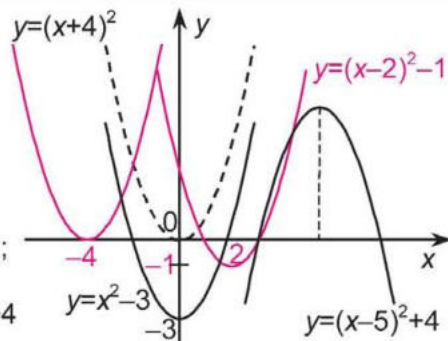


5. $y=(x+b)^2+c$



Пример:

$y=x^2-3$;
 $y=(x-2)^2-1$;
 $y=(x+4)^2$;
 $y=-(x-5)^2+4$



Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$ называются квадратными, где $a\neq 0$, b , c – числа.

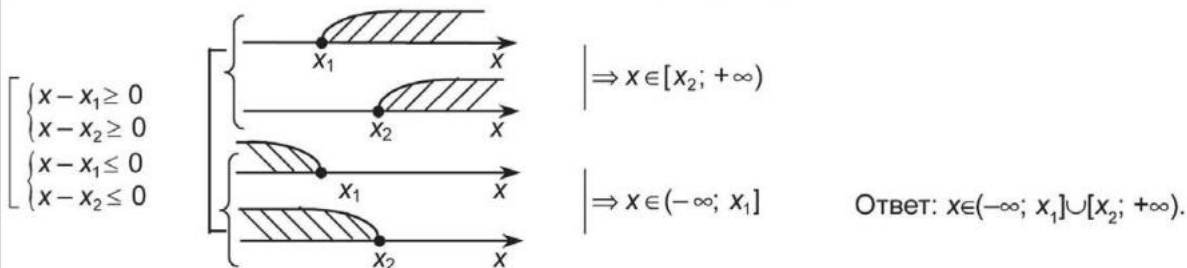
Способы решения квадратных неравенств

1. Аналитический способ

Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$, разложить на множители и решить соответствующие системы:

$$ax^2+bx+c\geq 0, a>0$$

1) Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни уравнения, значит, $a(x-x_1)(x-x_2)\geq 0$



2) если $a=0$, то x_1 – корень, значит, $a(x-x_1)^2\geq 0$

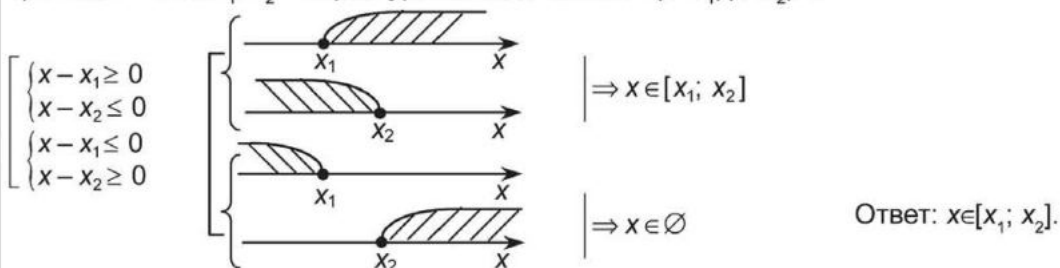
Так как $a>0$ $(x-x_1)^2\geq 0$ при любых значениях x , то решением неравенства является множество всех действительных чисел.

Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

3) если $a<0$, то уравнение корней не имеет, значит $\left. \begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0 \end{array} \right| \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

$$ax^2+bx+c \geq 0, a < 0$$

1) Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни уравнения, значит, $a(x-x_1)(x-x_2) \geq 0$

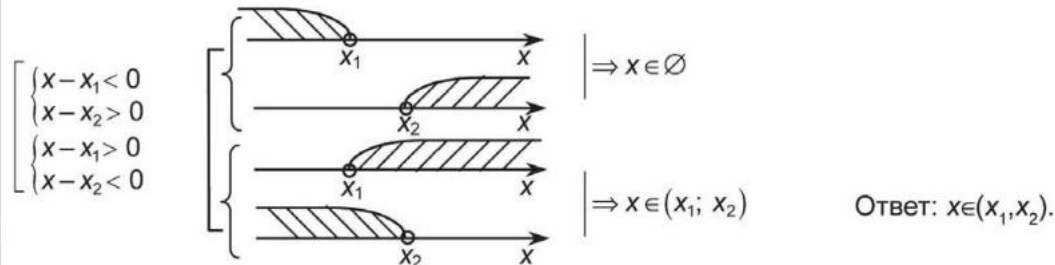


2) Если $a = 0$, то x_1 – корень, значит, $a(x-x_1)^2 \geq 0$; так как $a < 0$, $(x-x_1)^2 \geq 0$ при любых значениях x , то $a(x-x_1)^2 \geq 0$ только при $x = x_1$, в остальных случаях выражение будет принимать отрицательное значение.
 Ответ: $x = x_1$.

3) Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет, значит, $\begin{cases} ax^2+bx+c > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$.

$$ax^2+bx+c < 0, a > 0$$

1) Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни, значит, $a(x-x_1)(x-x_2) < 0$.



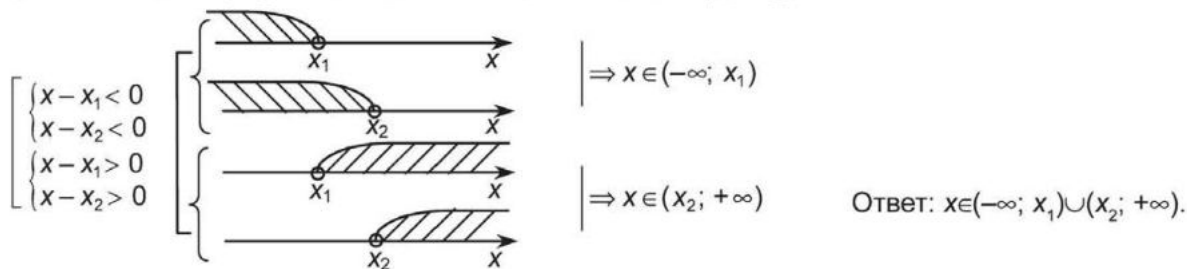
2) Если $a=0$, то x_1 – корень, значит, $a(x-x_1)^2>0$. Так как $a>0$ и $(x-x_1)^2<0$ при любых значениях, кроме $x=x_1$, то неравенство не имеет решений.

Ответ: $x \in \emptyset$.

3) Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет, значит, $\begin{cases} ax^2+bx+c < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

$$ax^2+bx+c<0, a<0$$

1) Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни уравнения, значит, $a(x-x_1)(x-x_2)<0$



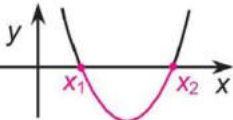
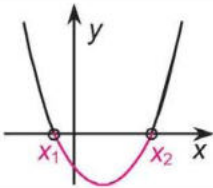
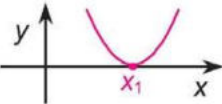
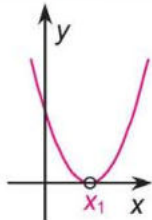
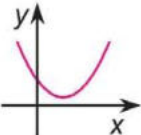
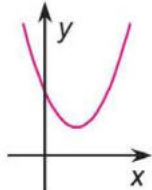
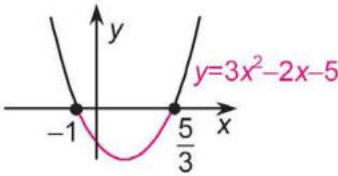
2) Если $a=0$, то x_1 – корень, значит, $a(x-x_1)^2<0$. Так как $a<0$ и $(x-x_1)^2>0$ при любых значениях x , кроме $x=x_1$, то $a(x-x_1)^2<0$ при любых значениях x , кроме $x=x_1$.

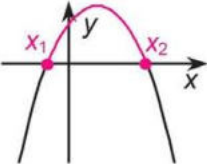
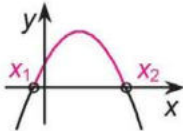
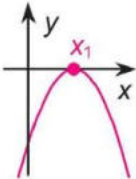
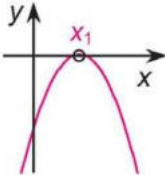
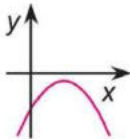
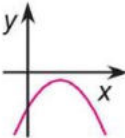
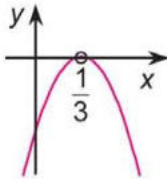
Ответ: $x \neq x_1$, (или $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$).

3) Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет, значит, $\begin{cases} ax^2+bx+c < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in R$

2. Графический способ

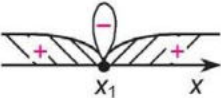
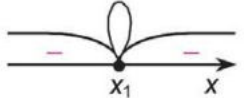
Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ и схематично построить график функции:

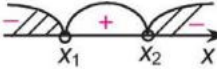
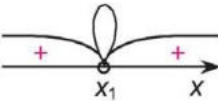
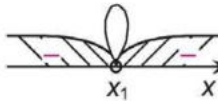
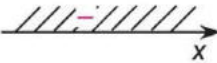
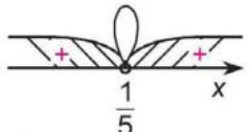
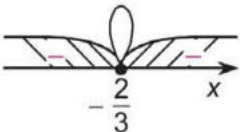
$ax^2+bx+c \geq 0, a > 0$	$ax^2+bx+c < 0, a > 0$
Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$. 	Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (x_1; x_2)$. 
Если $a = 0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in \mathbb{R}$. 	Если $a = 0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in \emptyset$. 
Если $a < 0$, то корней нет. Ответ: $x \in \mathbb{R}$. 	Если $a < 0$, то корней нет. Ответ: $x \in \emptyset$. 
Пример: $3x^2-2x-5 \leq 0$. Рассмотрим $3x^2-2x-5=0$. $\frac{D}{4} = 1+15=16$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm 4}{3}$; $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -1$. Ответ: $x \in \left[-1; \frac{5}{3}\right]$.	
	

$ax^2+bx+c \geq 0, a < 0$	$ax^2+bx+c < 0, a < 0$
Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in [x_1; x_2]$. 	Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. 
Если $a = 0$, то x_1 – корень. Ответ: $x = x_1$. 	Если $a = 0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$. 
Если $a < 0$, то корней нет. Ответ: $x \in \emptyset$. 	Если $a < 0$, то корней нет. Ответ: $x \in \mathbb{R}$. 
Пример: $-9x^2+6x-1 > 0$. Рассм. $-9x^2+6x-1=0$; $-(-9x^2-6x+1)=0$; $-(3x-1)^2=0$; $x = \frac{1}{3}$. Ответ: $x \in \emptyset$. 	

Метод интервалов

Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ и нанести корни уравнения на числовую прямую. На каждом из образовавшихся интервалов определить знак выражения по старшему коэффициенту.

$ax^2+bx+c \geq 0, a > 0$	$ax^2+bx+c \geq 0, a < 0$
Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.  Если старший коэффициент $a > 0$, то крайний правый интервал положительный. Далее знаки интервала чередуются.	Если $a > 0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in [x_1, x_2]$.  Если старший коэффициент $a < 0$, то крайний правый интервал отрицательный. Далее знаки интервалов чередуются.
Если $a = 0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in \mathbb{R}$.  Если x_1 – корень четной кратности, то чередования знаков у интервалов не происходит.	Если $a = 0$, то x_1 – корень. Ответ: $x = x_1$. 
Если $a < 0$, то корней нет. Ответ: $x \in \mathbb{R}$.  Так как $a > 0$ и трехчлен больше нуля, то решением неравенства является множество всех действительных чисел.	Если $a < 0$, то корней нет. Ответ: $x \in \emptyset$.  Так как $a < 0$, а трехчлен больше нуля, то неравенство решения не имеет.

$ax^2+bx+c<0, a>0$	$ax^2+bx+c<0, a<0$
Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (x_1; x_2)$. 	Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. 
Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in \emptyset$. 	Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$. 
Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x \in \emptyset$.  Так как $a>0$, а трехчлен меньше нуля, значит, неравенство решения не имеет.	Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x \in \mathbb{R}$.  Так как $a<0$ и трехчлен меньше нуля, значит, решением неравенства является множество всех действительных чисел.
Пример:	
$25x^2-10x+1>0$ Рассмотрим $25x^2-10x+1>0$. $(5x-1)^2=0; x=\frac{1}{5}$.  Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$.	$-4-12x-9x^2\leq 0$ Рассмотрим $-9x^2-12x-4=0$. $-(3x+2)^2=0; x=\pm\frac{2}{3}$.  Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

Степенная функция

Функция $y=x^3$

График функции – кубическая парабола.

1) О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$

2) О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$

3) нули функции $x=0$

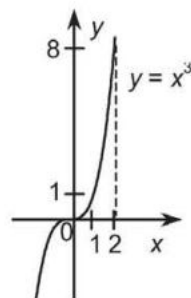
4) знакопостоянство:

$y > 0$, если $x \in (0; +\infty)$,

$y < 0$, если $x \in (-\infty; 0)$

5) монотонность: $y \uparrow$, если $x \in \mathbb{R}$

6) начало отсчета – центр симметрии



$$y=(x+a)^3+b$$

число a – отвечает за перемещение вдоль оси OX ;

если $a > 0$, то влево на a единиц от 0;

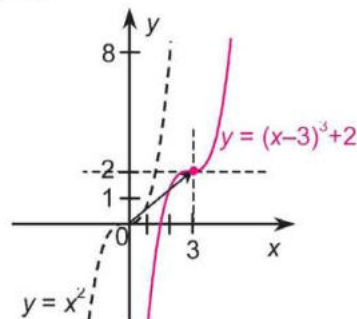
если $a < 0$, то вправо на a единиц от 0.

число b – отвечает за перемещение вдоль оси OY ;

если $b > 0$, то вверх на b единиц от 0;

если $b < 0$, то вниз на b единиц от 0.

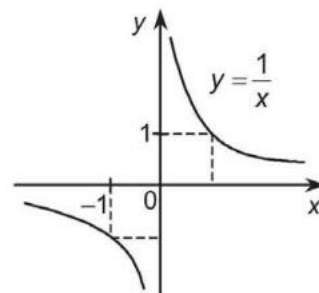
$$y=(x-3)^3+2$$



Функция $y = \frac{1}{x}$

График функции – гипербола.

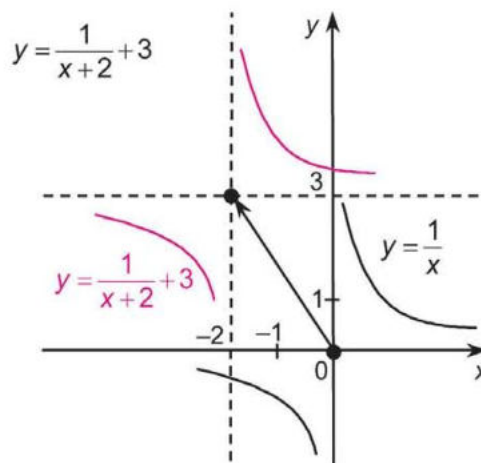
- 1) О.О.Ф $x \neq 0$
- 2) О.З.Ф $y \neq 0$
- 3) нули функции: нет
- 4) знакопостоянство:
 $y > 0$, если $x \in (0; +\infty)$,
 $y < 0$, если $x \in (-\infty; 0)$
- 5) монотонность: $y \downarrow$, если $x \neq 0$
- 6) начало отсчета – центр симметрии



$$y = \frac{1}{(a+x)} + b$$

число a – отвечает за перемещение вдоль оси OX ;
 если $a > 0$, то влево на a единиц от 0;
 если $a < 0$, то вправо на a единиц от 0.

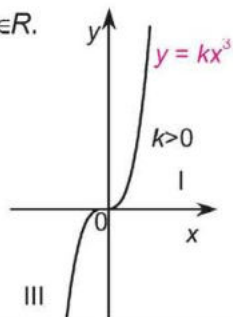
число b – отвечает за перемещение вдоль оси OY ;
 если $b > 0$, то вверх на b единиц от 0;
 если $b < 0$, то вниз на b единиц от 0.



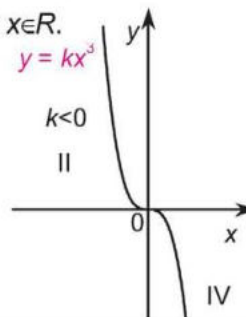
$$y=kx^3$$

Коэффициент k — отвечает за то, в каких координатных углах расположена кубическая парабола.

если $k>0$, то $y \uparrow$ при $x \in \mathbb{R}$.



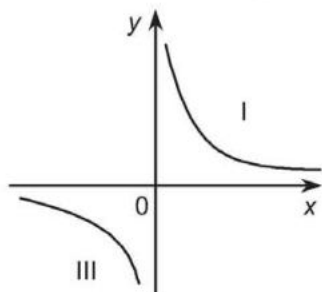
если $k<0$, то $y \downarrow$ при $x \in \mathbb{R}$.



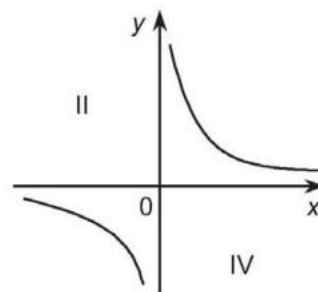
$$y = \frac{k}{x}$$

Коэффициент k — отвечает за то, в каких координатных углах расположена гипербола

если $k>0$, то $y \downarrow$ при $x \neq 0$.

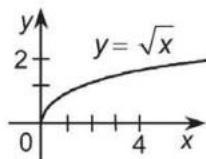


если $k<0$, то $y \uparrow$ при $x \neq 0$.



Функция $y = \sqrt{x}$

- 1) О.О.Ф. $x \in [0; +\infty)$
- 2) О.З.Ф. $y \in [0; +\infty)$
- 3) нули функции $x=0$
- 4) знакопостоянство: $y > 0$, если $x \in (0; +\infty)$
- 5) монотонность: $y \uparrow$, если $x \in [0; +\infty)$



- $$y = \sqrt{-x}$$
-
- 1) $x \in (-\infty; 0]$
 - 2) $y \in [0; +\infty)$
 - 3) $x=0$
 - 4) $y > 0$, если $x \in (-\infty; 0)$
 - 5) $y \downarrow$, если $x \in (-\infty; 0]$

-
- 1) $x \in [0; +\infty)$
 - 2) $y \in (-\infty; 0]$
 - 3) $x=0$
 - 4) $y < 0$, если $x \in (0; +\infty)$
 - 5) $y \downarrow$, если $x \in [0; +\infty)$

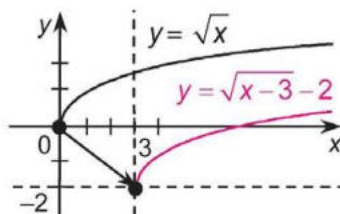
-
- 1) $x \in (-\infty; 0]$
 - 2) $y \in (-\infty; 0]$
 - 3) $x=0$
 - 4) $y < 0$, если $x \in (-\infty; 0)$
 - 5) $y \uparrow$, если $x \in (-\infty; 0]$

$$y = \sqrt{x+a} + b$$

число a – отвечает за перемещение вдоль оси OX ;
если $a > 0$, то влево на a единиц от 0;
если $a < 0$, то вправо на a единиц от 0.

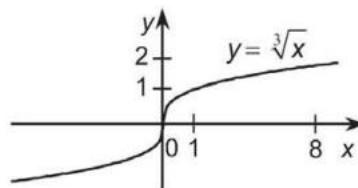
число b – отвечает за перемещение вдоль оси OY ;
если $b > 0$, то вверх на b единиц от 0;
если $b < 0$, то вниз на b единиц от 0.

$$y = \sqrt{x-3} - 2$$



Функция $y = \sqrt[3]{x}$

- 1) О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$
- 2) О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$
- 3) нули функции $x=0$
- 4) знакопостоянство: $y>0$, если $x>0$; $y<0$, если $x<0$
- 5) монотонность: $y \uparrow$, если $x \in \mathbb{R}$



Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

если $x_2 > x_1$ и $f(x_2) > f(x_1)$, то $f(x)$ – возрастает.

Функция $y=f(x)$ называется **убывающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

если $x_2 > x_1$ и $f(x_2) < f(x_1)$, то $f(x)$ – убывает.

Функция $y=f(x)$ называется **четной** на всей области определения, если верно равенство $f(-x)=f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y=f(x)$ называется **нечетной** на всей области определения, если верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала отсчета.

Прогрессии

1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d , называется **арифметической прогрессией**.

Число d – разность прогрессии. $a_n = a_{n-1} + d$; $d = a_n - a_{n-1}$.

формула n -члена: $a_n = a_1 + (n-1)d$

свойство прогрессии: $a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$

сумма n -членов: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ или $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

2. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q , называется **геометрической прогрессией**.

Число q – знаменатель прогрессии. $b_n = b_{n-1} \cdot q$; $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$.

формула n -члена: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

свойство прогрессии: $b_n = \sqrt{b_{n+k} \cdot b_{n-k}}$

сумма n -членов: $S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Иррациональные уравнения

Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$, где a – число, называется **иррациональным уравнением**.

Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет; если $a \geq 0$, то $f(x) = a^2$.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq a$ или $\sqrt{f(x)} < a$ называются **иррациональными неравенствами**.

$$\sqrt{f(x)} \geq a$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ a \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) = a^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < a$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < a^2 \end{cases}$$

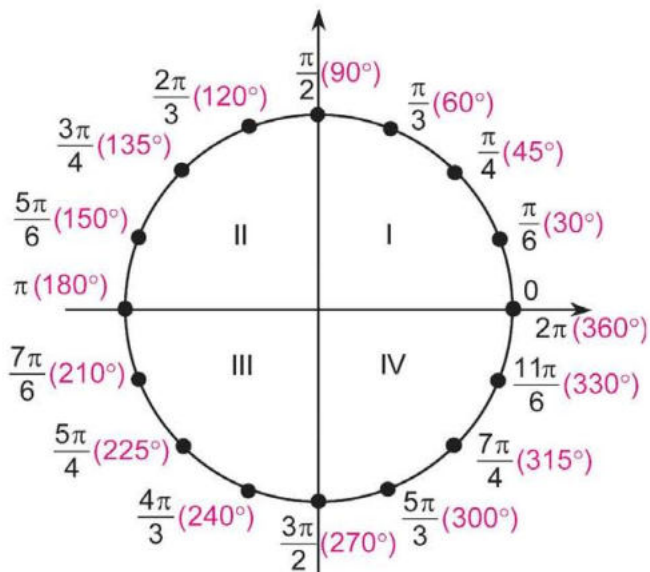
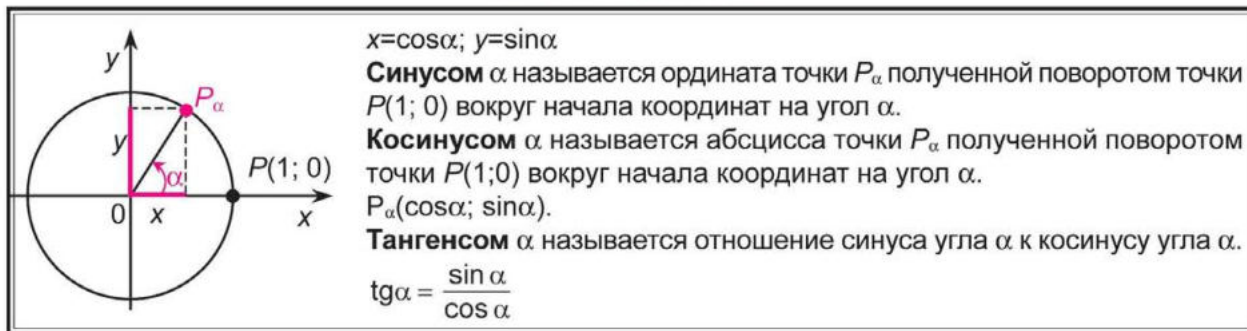
$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

Тригонометрия

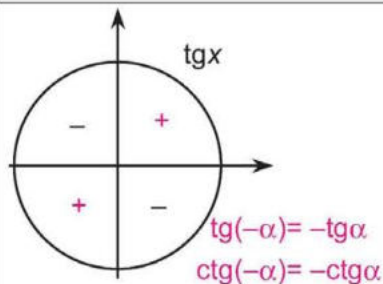
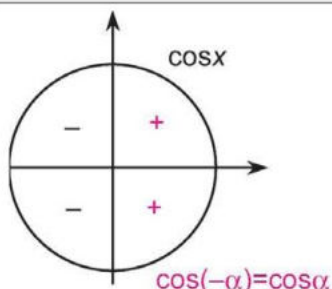
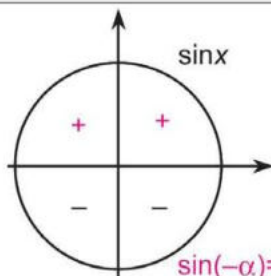


	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$



Формулы сложения

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Примеры

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 50^\circ \sin 80^\circ - \sin 50^\circ \cos 80^\circ &= \sin(80^\circ - 50^\circ) = \\ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 150^\circ &= \operatorname{tg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Формулы двойного угла	Примеры
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\sin 10x = 2\sin 5x \cdot \cos 5x$ $8\cos 3x \cdot \sin 3x = 4 \cdot (2\sin 3x \cos 3x) = 4\sin 6x$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$	$\cos 7x = \cos^2 \frac{7x}{2} - \sin^2 \frac{7x}{2}$ $\cos 16x = 2\cos^2 8x - 1; \cos 12x = 1 - 2\sin^2 6x$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \operatorname{tg} 4x$

Формулы понижения степени	Примеры
$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$	$\sin^2 5x = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x)$
$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$	$(1 + \cos 8x) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 8x) \right] = 2\cos^2 4x$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов	Примеры
$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) =$ $= \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$ $= 2\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	
$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = -2 \sin \frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} =$ $= -2 \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$
---	--

$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$	$2\sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ = \sin 90^\circ + \sin 10^\circ = 1 + \sin 10^\circ$
$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$	$3\cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{3}{2}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) =$
$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$	$= \frac{3}{2}\cos 100^\circ + \frac{3}{4}$

Формулы приведения

α	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$2\pi \pm \alpha$
$\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

Тригонометрические функции

$y = \cos x$

1) О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$

2) О.З.Ф. $y \in [-1; 1]$

3) Нули функции $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

4) Знакопостоянство:

$y > 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

$y < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

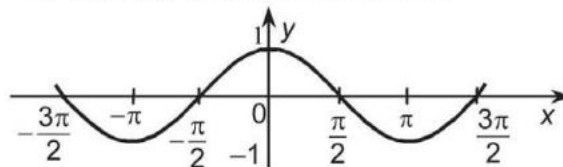
5) Монотонность:

$y \uparrow$, если $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

$y \downarrow$, если $x \in [0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

6) Функция периодическая: $q = 2\pi$

7) Функция четная: $\cos(-x) = \cos x$



$y = \sin x$

1) О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$

2) О.З.Ф. $y \in [-1; 1]$

3) Нули функции $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4) Знакопостоянство:

$y > 0$, если $x \in (0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

$y < 0$, если $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

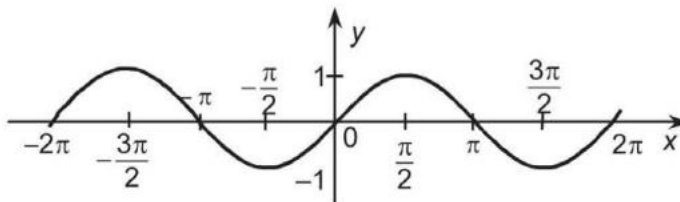
5) Монотонность:

$y \uparrow$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

$y \downarrow$, если $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

6) Функция периодическая: $q = 2\pi$

7) Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$



$y = \operatorname{tg} x$

1) О.О.Ф. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$

3) Нули функции $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4) Знакопостоянство:

$y > 0$, если $x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

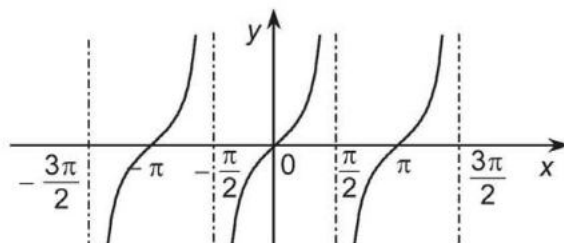
$y < 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; 0 + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

5) Монотонность:

$y \uparrow$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

6) Функция периодическая: $q = \pi$

7) Функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{ctg} x$

1) О.О.Ф. $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$

3) Нули функции $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4) Знакопостоянство:

$y > 0$, если $x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

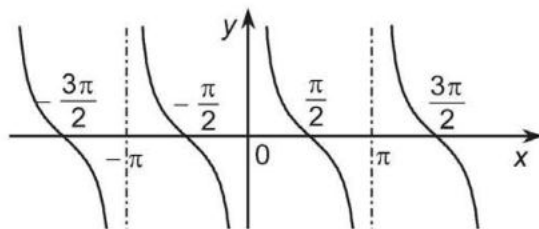
$y < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

5) Монотонность:

$y \downarrow$, если $x \in (0 + \pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$

6) Функция периодическая: $q = \pi$

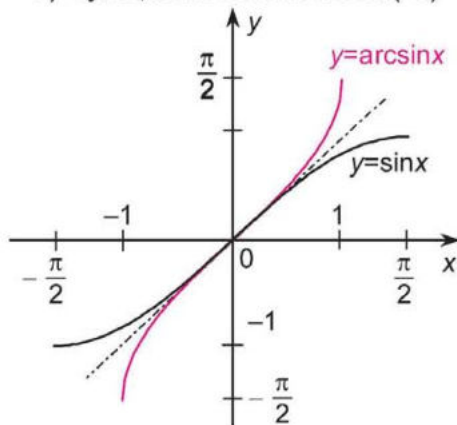
7) Функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$



Обратные тригонометрические функции

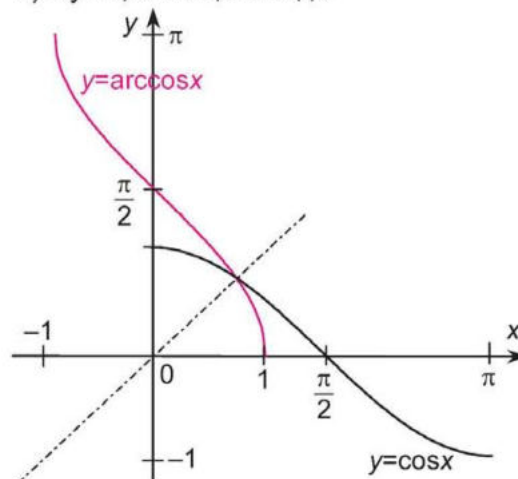
$y = \arcsin x$

- 1) О.О.Ф. $x \in [-1; 1]$
- 2) О.З.Ф. $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- 3) Нули функции $x=0$
- 4) Знакопостоянство:
 $y > 0$, если $x \in (0; 1]$
 $y < 0$, если $x \in [-1; 0)$
- 5) Монотонность:
 $y \uparrow$, если $x \in [-1; 1]$, $k \in \mathbb{Z}$
- 6) Функция неперiodическая
- 7) Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$



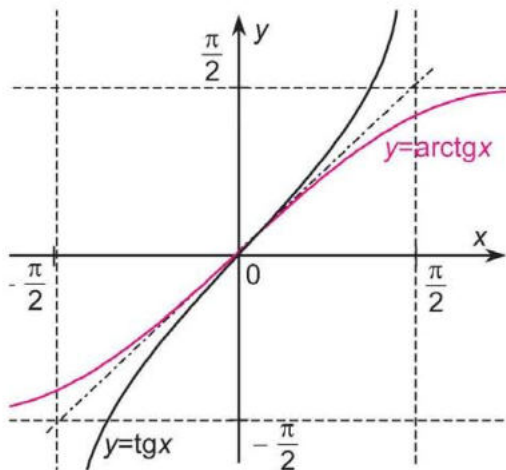
$y = \arccos x$

- 1) О.О.Ф. $x \in [-1; 1]$
- 2) О.З.Ф. $y \in [0; \pi]$
- 3) Нули функции $x=1$
- 4) Знакопостоянство:
 $y > 0$, если $x \in [-1; 1)$
- 5) Монотонность:
 $y \downarrow$, если $x \in [-1; 1]$, $k \in \mathbb{Z}$
- 6) Функция неперiodическая
- 7) Функция общего вида

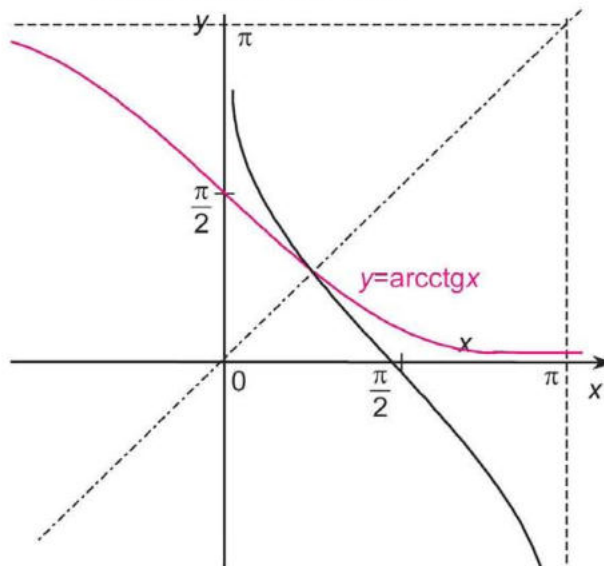


$y = \arctg x$

- 1) О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$
- 2) О.З.Ф. $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- 3) Нули функции: $x=0$
- 4) Знакопостоянство:
 $y > 0$, если $x \in (0; +\infty)$
 $y < 0$, если $x \in (-\infty; 0)$
- 5) Монотонность:
 $y \uparrow$, если $x \in \mathbb{R}$
- 6) Функция неперерывная
- 7) Функция нечетная $\arctg(-x) = -\arctg x$

 **$y = \text{arcctg} x$**

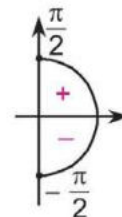
- 1) О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$
- 2) О.З.Ф. $y \in (0; \pi)$
- 3) Нули функции: нет
- 4) Знакопостоянство:
 $y > 0$, если $x \in \mathbb{R}$
- 5) Монотонность:
 $y \downarrow$, если $x \in \mathbb{R}$
- 6) Функция неперерывная
- 7) Функция общего вида



1. Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,
синус которого равен a .

$$\arcsin a = \alpha : \sin \alpha = a, \text{ где } a \in [-1; 1]; \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

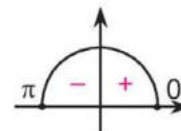
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



2. Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$,
косинус которого равен a .

$$\arccos a = \alpha : \cos \alpha = a, \text{ где } a \in [-1; 1]; \alpha \in [0; \pi].$$

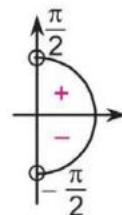
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$



3. Арктангенсом числа $a \in \mathbb{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,
тангенс которого равен a .

$$\operatorname{arctg} a = \alpha : \operatorname{tg} \alpha = a, \text{ где } a - \text{любое}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

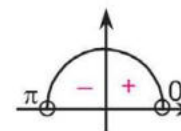
$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$



4. Арккотангенсом числа $a \in \mathbb{R}$ называется такое число $\alpha \in (0; \pi)$,
котангенс которого равен a .

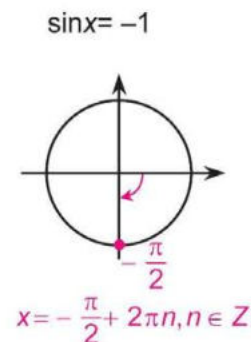
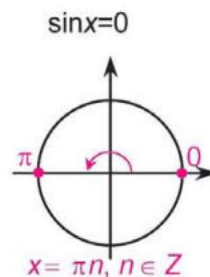
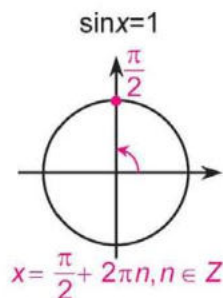
$$\operatorname{arcctg} a = \alpha : \operatorname{ctg} \alpha = a, \text{ где } a - \text{любое}, \alpha \in (0; \pi).$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

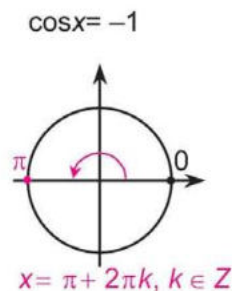
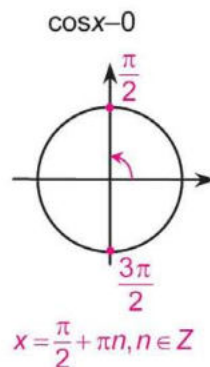
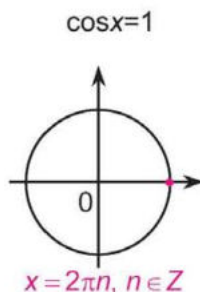


Тригонометрические уравнения

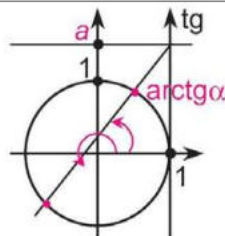
1. $\sin x = a, |a| \leq 1$; $\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ или $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



2. $\cos x = a, |a| \leq 1$; $\begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$; $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



3. $\operatorname{tg} x = a$, a – любое; $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$



4. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \quad | : \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ где } \varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Пример

$$\sqrt{3} \sin 3x - \cos 2x = \sqrt{2} \quad | : \sqrt{3+1}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

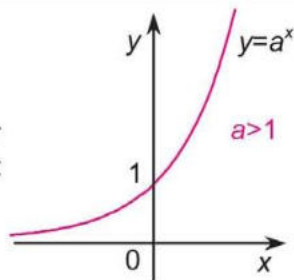
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Показательная функция

Функция вида $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$ – число, x – независимая переменная называется показательной функцией.

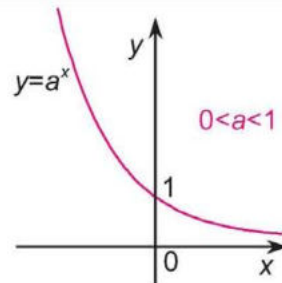
$$y=a^x, a>1$$

- 1) О.О.Ф. $x\in R$
- 2) О.З.Ф. $y\in(0;+\infty)$
- 3) нули функции: нет
- 4) знакопостоянство:
 $y>0$ при $x\in R$
- 5) монотонность:
 $y\uparrow$ при $x\in R$



$$y=a^x, 0<a<1$$

- 1) О.О.Ф. $x\in R$
- 2) О.З.Ф. $y\in(0;+\infty)$
- 3) нули функции: нет
- 4) знакопостоянство:
 $y>0$ при $x\in R$
- 5) монотонность:
 $y\downarrow$ при $x\in R$



Показательные уравнения сводятся к решению уравнения $a^x=b$,
где $a>0$, $a\neq 1$, x – неизвестное.

если $b>0$, то уравнение имеет один корень,
если $b\leq 0$, то уравнение корней не имеет.

Показательные неравенства сводятся к решению неравенств вида:
 $a^x>a^b$ или $a^x<a^b$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Неравенства решаются с помощью свойств возрастания и убывания показательной функции.

если $a>1$, то $a^x>a^b$ или $a^x<a^b$
 $x>b$ или $x<b$

если $0<a<1$, то $a^x>a^b$ или $a^x<a^b$
 $x<b$ или $x>b$

Логарифмы

Логарифмом положительного b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую нужно возвести число a чтобы получить b .

$$\log_a b = x : a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b, b > 0, a > 0, a \neq 1$.

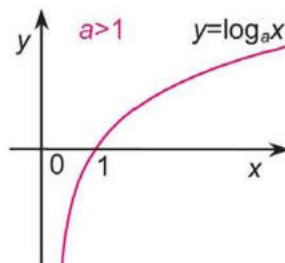
Свойства логарифмов	Примеры
1. $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$	$\log_3 \frac{1}{3} = -1; \log_{76} 1 = 0$
2. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$	$\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 10 = 1$
3. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$	$\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 25 = 2$
4. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$	$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$
5. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$	$\log_{\sqrt{2}} 2 = 2 \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$
6. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_5 7 = \frac{1}{\log_7 5}$
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\frac{\log_3 125}{\log_3 5} = \log_5 125 = 3$

Логарифмическая функция

Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ – число, x – независимая переменная называется логарифмической функцией.

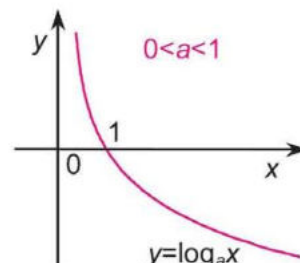
$$y = \log_a x$$

- 1) О.О.Ф. $x \in (0; +\infty)$
- 2) О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$
- 3) нули функции: $x = 1$
- 4) знакопостоянство:
 $y > 0$, если $x \in (1; +\infty)$
 $y < 0$, если $x \in (0; 1)$
- 5) монотонность:
 $y \uparrow$, если $x \in (0; +\infty)$



$$y = \log_a x$$

- 1) О.О.Ф. $x \in (0; +\infty)$
- 2) О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$
- 3) нули функции: $x = 1$
- 4) знакопостоянство:
 $y > 0$, если $x \in (0; 1)$
 $y < 0$, если $x \in (1; +\infty)$
- 5) монотонность:
 $y \downarrow$, если $x \in (0; +\infty)$



Логарифмические уравнения сводятся к решению уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Логарифмические неравенства сводятся к решению неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, или $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$

$$\begin{aligned} &\text{если } a > 1, \text{ то } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ &\text{если } 0 < a < 1, \text{ то } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Производная

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$, такое, что $x+h$ также принадлежит этому промежутку. Тогда предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента h , когда $h \rightarrow 0$, называются **производной** функции $y=f(x)$ в точке x . Обозначается $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h}$, где $\Delta y = f(x+h) - f(x)$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

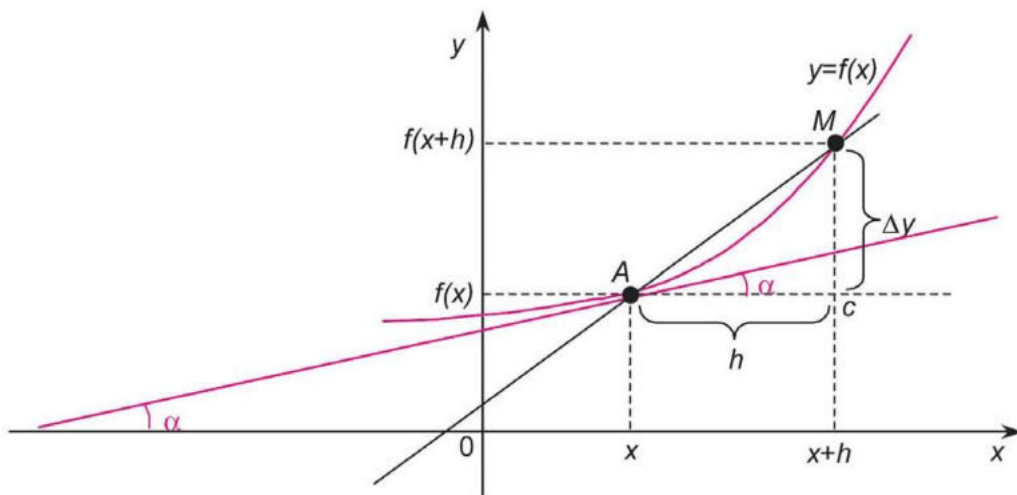


Таблица производных

Функция	Производная	Пример
c	0	$(5)'=0; \left(-\frac{2}{7}\right)'=0$
$ax+b$	a	$(3x-7)'=3; \left(1-\frac{2}{3}x\right)'=-\frac{2}{3}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$(x^7)'=7x^6; (\sqrt[3]{x^2})'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
$(ax+b)^n$	$n \cdot a \cdot (ax+b)^{n-1}$	$((2x-5)^3)'=3 \cdot 2(2x-5)^2=6(2x-5)^2$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$(7^x)'=7^x \cdot \ln 7$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(\log_3 x)'=\frac{1}{x \ln 3}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	

Правила дифференцирования

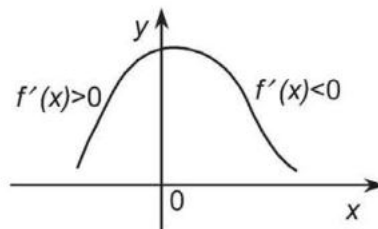
$(u+v)'=u'+v'$	$(5x^3-x^8)'=15x^2-8x^7$
$(u \cdot v)'=u' \cdot v+u \cdot v'$	$(x^2 \cdot \cos x)'=(x^2)' \cdot \cos x+x^2 \cdot (\cos x)'=2x \cos x-x^2 \sin x$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u' \cdot v-u \cdot v'}{v^2}$	$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x}\right)'=\frac{(\sqrt{x})' \cdot \sin x-\sqrt{x} \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} =$ $=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x-\sqrt{x} \cdot \cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-2x \cos x}{2\sqrt{x} \cdot \sin^2 x}$
$(u(v))'=u'(v) \cdot v'$	$(6^{\lg x})'=6^{\lg x} \cdot \ln 6 \cdot (\lg x)'=\frac{6^{\lg x} \ln 6}{\cos^2 x}$

Уравнение касательной

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), \text{ где } x_0 - \text{точка касания}$$

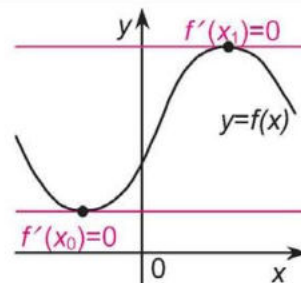
Применение производной к исследованию функции

1. Если $f'(x)>0$ на промежутке,
то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке;
если $f'(x)<0$ на промежутке,
то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.



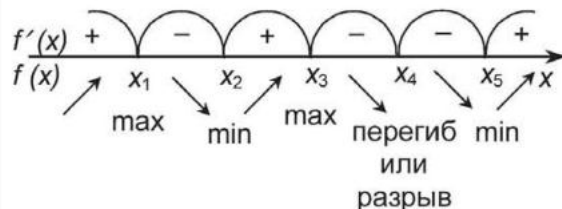
2. x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$,
если существует такая окрестность точки x_0 ,
что для всех x этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$,
если существует такая окрестность точки x_0 ,
что для всех x этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.



Точки минимума и максимума называются **точками экстремума**.

Точки, в которых производная равна нулю, называются **стационарными**.

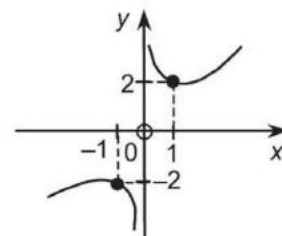
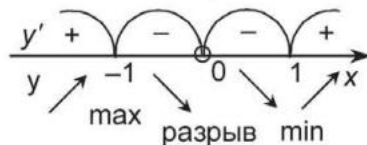


где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – стационарные точки.

Пример: $y = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Нули функции: $x + \frac{1}{x} = 0$, нет корней.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$y' = 0, x^2 - 1 = 0, x_{1,2} = \pm 1$$



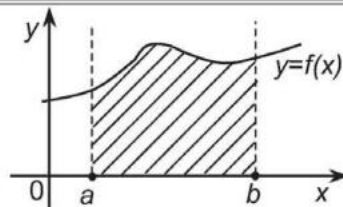
Первообразная

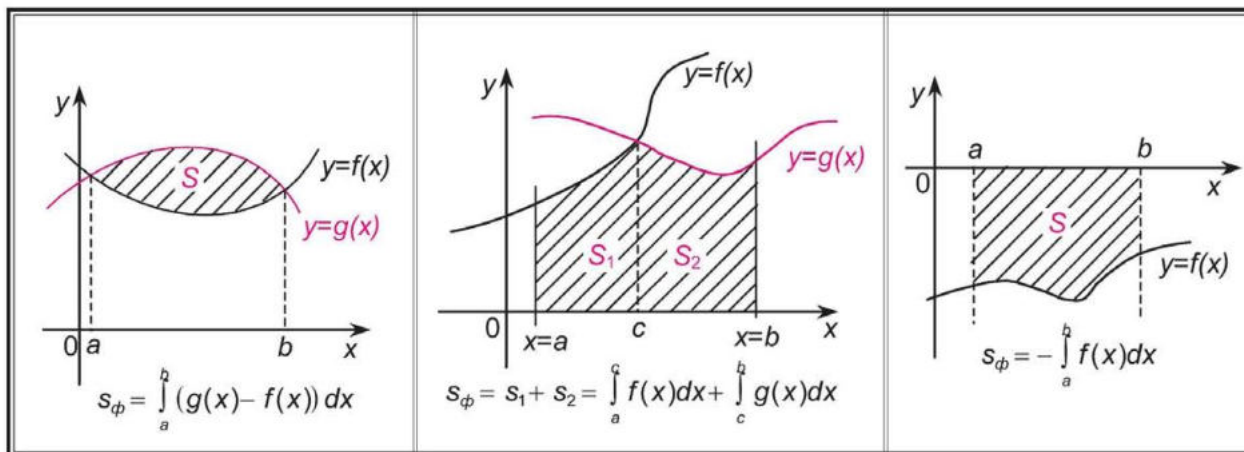
Функция $c(x)$ называется **первообразной функции $f(x)$** на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $c'(x)=f(x)$.

Функция	Первообразная	Пример
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$f(x) = x^9 \Rightarrow F(x) = \frac{x^{10}}{10} + C$ $f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow F(x) = 4 \ln x + C$
$\frac{1}{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln kx+b + C$	$f(x) = \frac{1}{7x+3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{7} \ln 7x+3 + C$
e^x	$e^x + C$	
$e^{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$	$f(x) = e^{-x+2} \Rightarrow F(x) = -e^{-x+2} + C$
$\sin(kx+b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$	$f(x) = \sin(3x-1) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C$
$\cos(kx+b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$	$f(x) = \cos(2-7x) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{7} \sin(2-7x) + C$

Площадь криволинейной трапеции

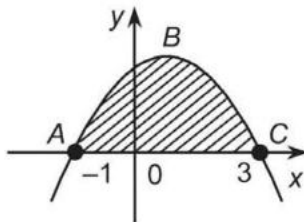
Фигура, ограниченная снизу отрезком $[a; b]$ оси X , сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, принимающей положительное значение, а с боков отрезками прямых $x=a, x=b$, называется **криволинейной трапецией**. $S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$





Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -x^2 + 2x + 3$ и осью абсцисс.



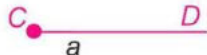
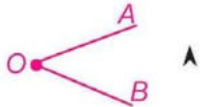
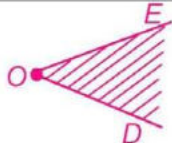
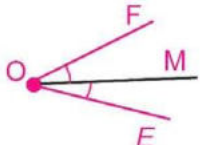
$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \\
 &= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_{-1}^3 = \\
 &= \left(-\frac{1}{3} \cdot 27 + 9 + 9\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1) + 1 - 3\right) = \\
 &= 9 - \frac{1}{3} + 2 = 10\frac{2}{3} \text{ (ед}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

Геометрия

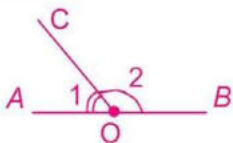
В переводе с греческого означает «землемерие». Основные элементы: точка, прямая, плоскость.

Аксиома – утверждение, которое не требует доказательств.

Теорема – утверждение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

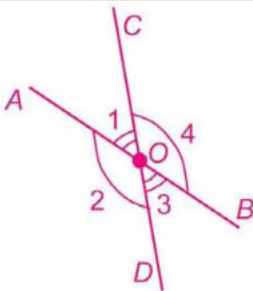
	Отрезок – часть прямой, ограниченная двумя точками. Обозначается: AB или BA.
	Луч – часть прямой, ограниченная с одной стороны. Обозначается CD или a.
	Угол – геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки, которая называется вершиной угла, а лучи – сторонами угла. Обозначается $\angle AOB$ или $\angle BOA$.
	Плоский угол – часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки. Обозначается $\angle EOD$ или $\angle DOE$.
	Середина отрезка – точка, делящая отрезок пополам. Обозначается $E \in AB$, $AE = EB$.
	Биссектриса угла – луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла. OM – биссектриса, $\angle FOM = \angle EOM$

Смежные углы и их свойство

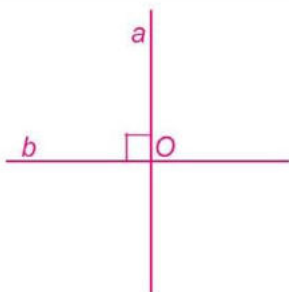


Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными углами**.
Смежные углы в сумме составляют 180° .
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Вертикальные углы и их свойство

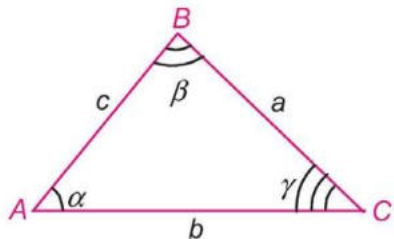


Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.
Вертикальные углы равны $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.



Перпендикулярные прямые – две пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямые углы.
Обозначение $a \perp b$.

Треугольники



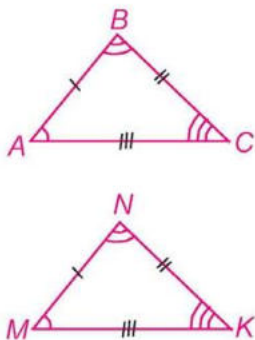
Треугольник – геометрическая фигура, образованная тремя точками, не лежащими на одной прямой, и тремя попарно соединенными отрезками.

Точки называются **вершинами** треугольника.

Отрезки называются **сторонами** треугольника.

Углы, образованные отрезками, выходящими из вершин треугольниками, называются **углами** треугольника.

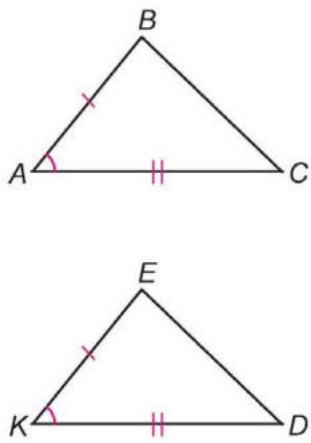
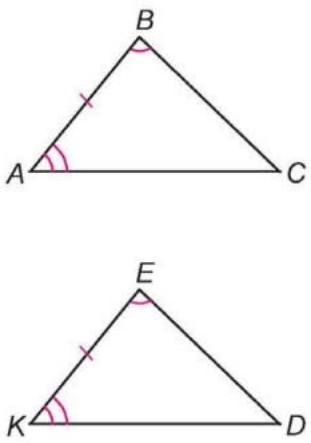
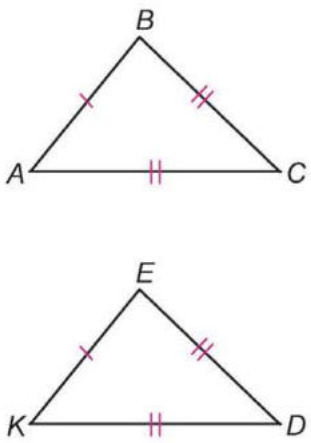
Обозначение: $\triangle ABC$ или $\triangle BCA$ или $\triangle CAB$.



Два треугольника называются **равными**, если три стороны и три угла одного треугольника соответственно равны трем сторонам и трем углам другого треугольника.

Если $AB=MN$; $BC=NK$; $AC=MK$; $\angle A=\angle M$; $\angle B=\angle N$; $\angle C=\angle K$, то $\triangle ABC=\triangle MNK$.

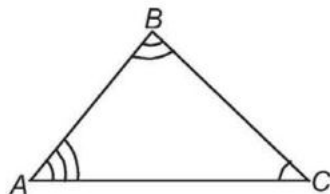
Признаки равенства треугольников

I признак (по двум сторонам и углу между ними)	II признак (по стороне и двум прилежащим углам)	III признак (по трем сторонам)
Если $AB=KE$, $AC=KD$, $\angle A=\angle K$, то $\triangle ABC=\triangle KED$ 	Если $AB=KE$, $\angle A=\angle K$, $\angle B=\angle E$, то $\triangle ABC=\triangle KED$ 	Если $AB=KE$, $AC=KD$, $BC=ED$, то $\triangle ABC=\triangle KED$ 
Значит, для того чтобы утверждать, что два треугольника равны, достаточно знать равенство трех пар соответствующих элементов.		

Типы треугольников

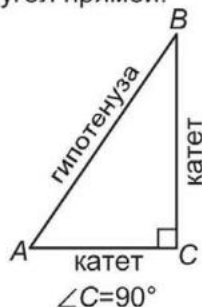
По углам

Треугольник называется **остроугольным**, если все углы острые.



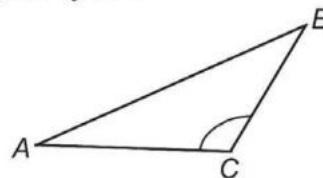
$$\angle A < 90^\circ, \angle B < 90^\circ, \angle C < 90^\circ$$

Треугольник называется **прямоугольным**, если один угол прямой.



$$\angle C = 90^\circ$$

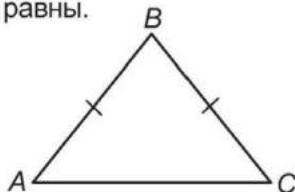
Треугольник называется **тупоугольным**, если один угол тупой.



$$90^\circ < \angle C < 180^\circ$$

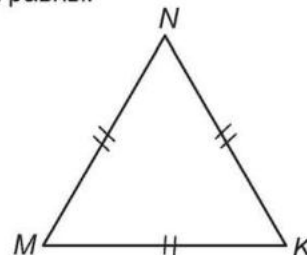
По сторонам

Треугольник называется **равнобедренным**, если две стороны равны.

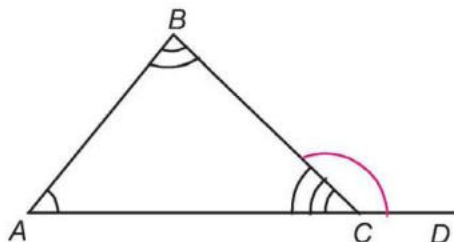


$AB = BC$ – равные стороны, называются боковыми сторонами; AC – называется основанием треугольника.

Треугольник называется **равносторонним**, если все стороны равны.



$$MN = NK = MK.$$



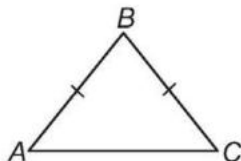
- Сумма углов любого треугольника равна 180° .
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
- Внешний угол треугольника – угол, смежный с каким-нибудь углом данного треугольника.
 $\angle BCD$ – внешний угол $\triangle ABC$ при вершине C.
- Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
 $\angle BCD = \angle A + \angle B$
- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.
- Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

$AB < AC + BC$; $BC < AB + AC$; $AC < AB + BC$ – неравенство треугольника

Свойство равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

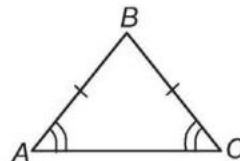
Если $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$

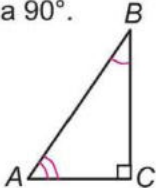
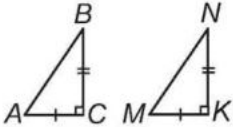
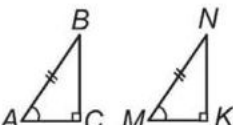
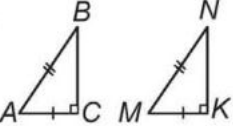


Признак равнобедренного треугольника

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

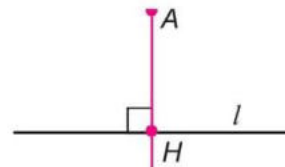
Если $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.



Свойства прямоугольного треугольника	Признаки прямоугольного треугольника
1. Сумма острых углов равна 90°. $\angle A + \angle C = 90^\circ$ 	1. По двум катетам: Если $AC = MK$, $BC = NK$, то $\triangle ABC = \triangle MNK$. 
2. Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Если $\angle A = 30^\circ$, то $BC = \frac{1}{2} AB$. Если $\angle B = 30^\circ$, то $AC = \frac{1}{2} AB$.	2. По катету и острому углу: Если $AC = MK$, $\angle B = \angle N$, то $\triangle ABC = \triangle MNK$. 
3. Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°. Если $AC = \frac{1}{2} AB$, то $\angle B = 30^\circ$. Если $BC = \frac{1}{2} AB$, то $\angle A = 30^\circ$.	3. По гипотенузе и острому углу: Если $AB = MN$, $\angle A = \angle M$, то $\triangle ABC = \triangle MNK$. 
	4. По катету и гипотенузе: Если $AC = MK$, $AB = MN$, то $\triangle ABC = \triangle MNK$. 
Значит, для того чтобы утверждать, что два прямоугольных треугольника равны, достаточно знать равенство двух пар соответствующих элементов.	

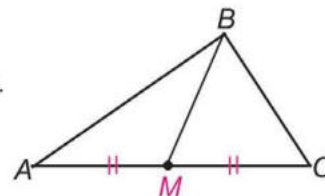
Перпендикуляр – отрезок, проведенный из точки к прямой под прямым углом.

AM – перпендикуляр к прямой l , $AM \perp l$



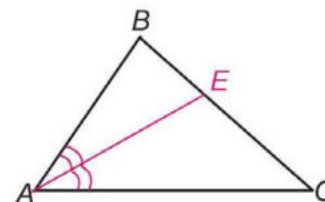
Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника.

BM – медиана, $AM = MC$



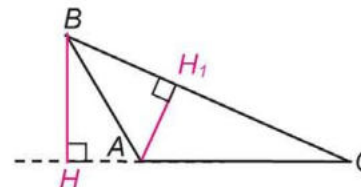
Биссектриса угла треугольника – отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны треугольника.

AE – биссектриса, $\angle BAE = \angle CAE$



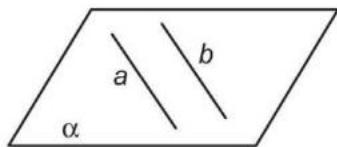
Высота треугольника – перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

$BH \perp AC$, $AH_1 \perp BC$, BH и AH_1 – высоты.



Параллельные прямые

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.



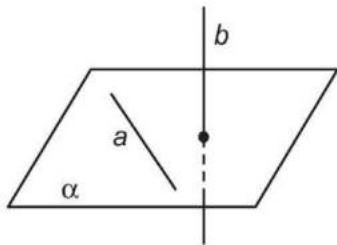
Если $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $a \not\cap b$, то $a \parallel b$.

то есть для того, чтобы утверждать, что прямые параллельны, необходимо чтобы оба условия выполнялись:

- 1) обе прямые лежали в одной плоскости
- 2) обе прямые не имели общих точек.

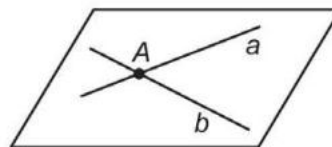
выполняется только 2-е условие:

Если $a \in \alpha$, $b \notin \alpha$, $a \not\cap b$, то $a \not\parallel b$



выполняется только 1-е условие:

Если $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $a \cap b = A$, то $a \not\parallel b$



При пересечении прямых a и b секущей c получим 8 углов:

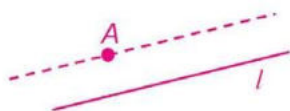
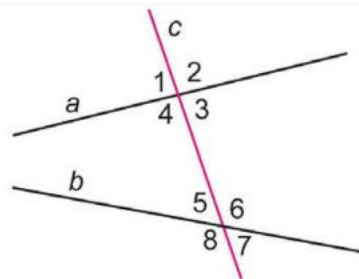
$\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ – внутренние накрест лежащие углы;

$\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$ – внешние накрест лежащие углы;

$\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$ – внутренние односторонние углы;

$\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$ – внешние односторонние углы;

$\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$ – соответственные углы.



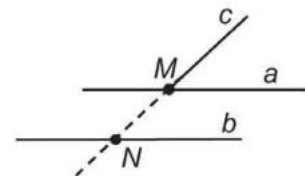
Аксиома параллельных прямых:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Следствие:

1. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

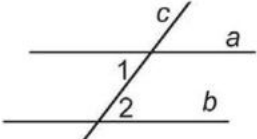
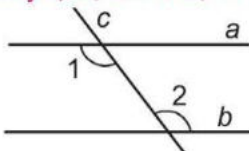
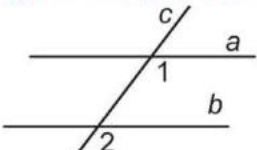
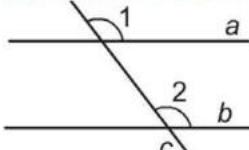
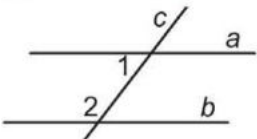
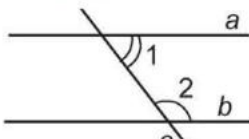
Если $a \parallel b$, $a \cap c = M$, то $b \cap c = N$

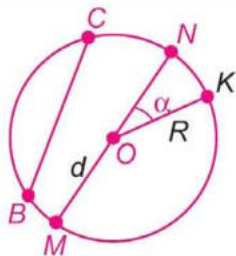


2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.

Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.



Свойства параллельных прямых	Признаки параллельных прямых
1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны. Если $a \parallel b$, c – секущая, то $\angle 1 = \angle 2$ 	1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Если c – секущая, $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$. 
2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны. Если $a \parallel b$, c – секущая, то $\angle 1 = \angle 2$. 	2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны. Если c – секущая, $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$. 
3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°. Если $a \parallel b$, c – секущая, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. 	3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны. Если c – секущая, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то $a \parallel b$. 



Окружность – геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется центром окружности.

Радиус – отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности; обозначается R или r .

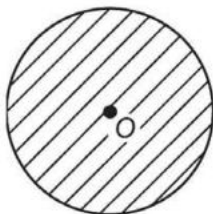
Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр – хорда, проходящая через центр окружности; обозначается d , $d=2r$.

(Длина окружности $C=2\pi R$).

Дуга – часть окружности, ограниченная двумя точками.

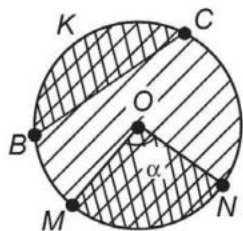
$$(\cup NK = \frac{\pi R \cdot \alpha}{180^\circ}).$$



Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Радиус, хорда, диаметр круга определяются так же, как и у окружности.

(Площадь круга $S=\pi R^2$.)

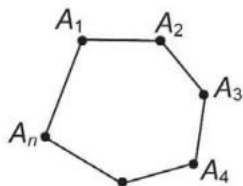


Сегмент (BCK) – часть круга, отсекаемая хордой BC .

Сектор (MON) – часть круга, вырезаемая двумя радиусами OM и ON .

$$(\text{Площадь сектора } S_{MON} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ})$$

Многоугольники



Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**.

Звенья ломаной – **стороны многоугольника**.

Концы звеньев – **вершины многоугольника**.

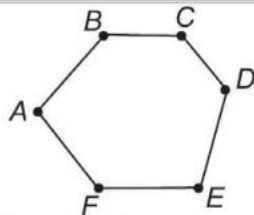
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – n -угольник, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – вершины,

$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ – стороны.

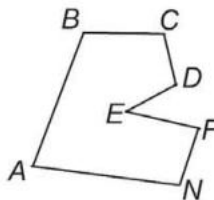
Отрезки, соединяющие несоседние вершины, называются **диагоналями** многоугольника.

* Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

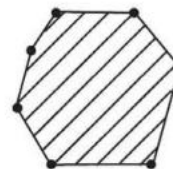
* **Плоским** многоугольником называется многоугольник с его внутренней областью.



Выпуклый многоугольник



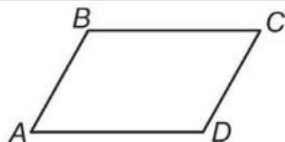
Не является выпуклым многоугольником



Плоский многоугольник

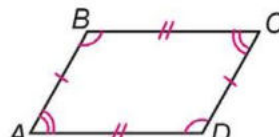
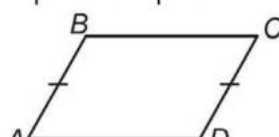
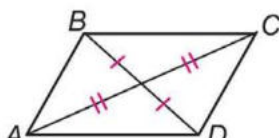
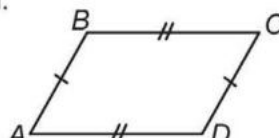
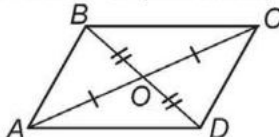
Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

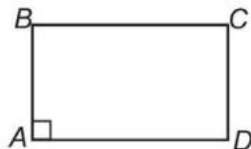
Сумма внешних углов n -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .



Параллелограмм – четырехугольник, стороны которого попарно параллельны.

Если $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, то $ABCD$ – параллелограмм.

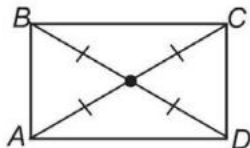
Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
1. В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны.  Если $ABCD$ – параллелограмм, то $AB=CD$, $BC=AD$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.	1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.  Если $AB \parallel CD$, $AB=CD$, то $ABCD$ – параллелограмм.
2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.  Если $ABCD$ – параллелограмм, $AC \cap BD = O$, то $AO=OC$, $BO=OD$.	2. Если в четырехугольнике стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.  Если $AB=CD$, $BC=AD$, то $ABCD$ – параллелограмм.
	3. Если в четырехугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.  Если $AB \cap CD = O$, $AO=OC$, $BO=OD$, то $ABCD$ – параллелограмм.



Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые.
 Если $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, $ABCD$ – прямоугольник.

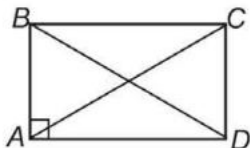
Свойства прямоугольника

1. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма, то есть противоположные стороны равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам.



Если $ABCD$ – прямоугольник, то $AB=CD$; $BC=AD$; $AO=OC$; $BO=OD$.

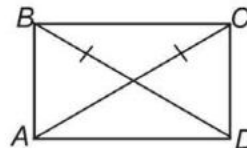
2. Диагонали прямоугольника равны.



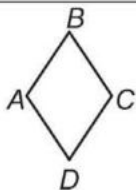
Если $ABCD$ – прямоугольник, то $AC=BD$.

Признак прямоугольника

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.



Если $ABCD$ – параллелограмм, $AC=BD$, то $ABCD$ – прямоугольник.

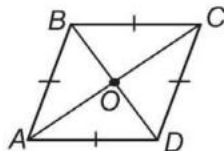


Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны.

Если $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB=BC=CD=AD$ то $ABCD$ – ромб.

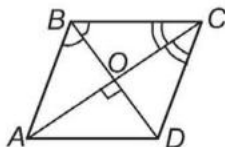
Свойства ромба

1. Ром обладает всеми свойствами параллелограмма, то есть противоположные углы равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам.



Если $ABCD$ – ромб, то $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $AO = OC$, $BO = OD$.

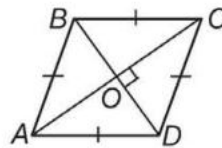
2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.



Если $ABCD$ – ромб, то $AC \perp BD$, $\angle BCA = \angle DCA$, $\angle ABD = \angle CBD$.

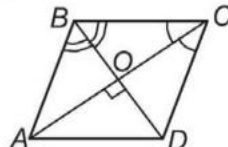
Признаки ромба

1. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.

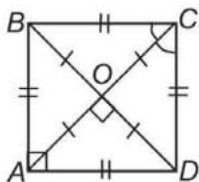


Если $ABCD$ – параллелограмм, $AC \perp BD$, то $ABCD$ – ромб.

2. Если в параллелограмме диагонали являются биссектрисами углов, то этот параллелограмм – ромб.

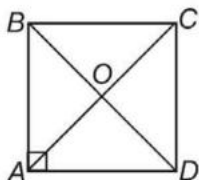


Если $ABCD$ – параллелограмм, $\angle BCA = \angle DCA$, $\angle ABD = \angle CBD$, то $ABCD$ – ромб.



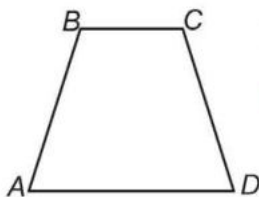
Квадрат – прямоугольник, у которого все стороны равны. Или: квадрат – ромб, у которого все углы – прямые.

Если $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB=BC$, $\angle A=90^\circ$ то $ABCD$ – квадрат.



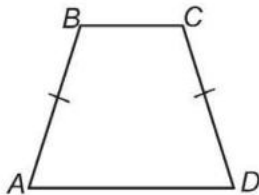
Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба:

1. $AB=BC=CD=AD$
2. $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$
3. $AC=BD$
4. $AC \perp BD$, $\angle BCA=\angle DCA$, $\angle ABD=\angle CBD$
5. $BO=OD=AO=OC$



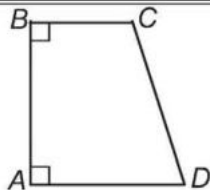
Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Если $BC \parallel AD$; $AB \nparallel CD$, то $ABCD$ – трапеция.

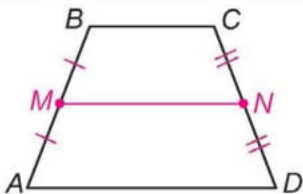


Трапеция называется **равнобедренной**, если боковые стороны равны.

$AB=CD$.



Трапеция называется **прямоугольной**, если боковая сторона перпендикулярна основаниям.



Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон. MN – средняя линия трапеции $ABCD$. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований.

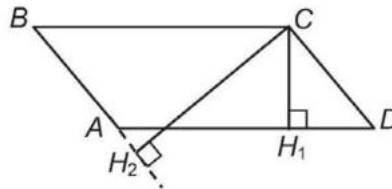
$$MN \parallel AD \parallel BC \text{ и } MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

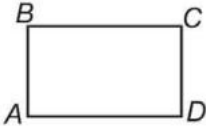
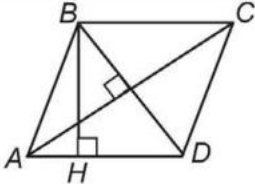
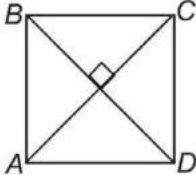
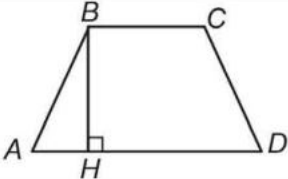
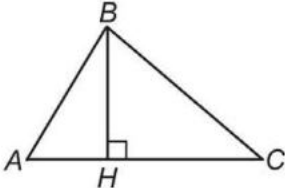
Площади многоугольников

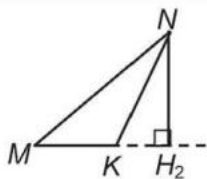
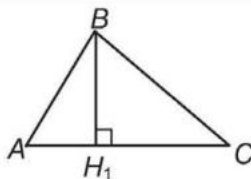
Площадь – положительное число

1. Единица измерения площади – квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.
2. Площади равных фигур равны.
3. Площадь фигуры, составленной из нескольких частей, равна сумме площадей этих частей.

1) **Параллелограмм**: $S = AD \cdot CH_1$ или $S = AB \cdot CH_2$.
Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

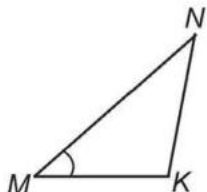
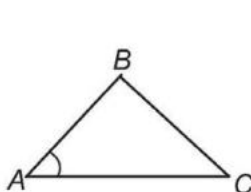


2) Прямоугольник: $S=AB \cdot BC$. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.	
3) Ромб: $S=AD \cdot BH$ (как параллелограмм), $S=\frac{1}{2} AC \cdot BD$. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.	
4) Квадрат: $S=AB^2$ (как прямоугольник), $S=\frac{1}{2} AC^2$ (как ромб).	
5) Трапеция: $S=\frac{1}{2}(BC+AD) \cdot BH$. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.	
6) Треугольник: $S=\frac{1}{2} AC \cdot BH$. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.	



- Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

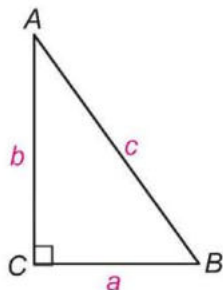
Если $BH_1 = NH_2$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{AC}{MK}$



- Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Если $\angle A = \angle M$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$

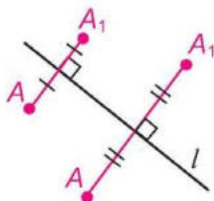
Теорема Пифагора



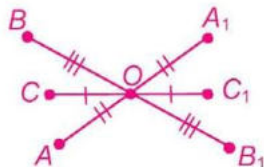
Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов $c^2 = a^2 + b^2$.
Обратно: если квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Симметрия

Осевая симметрия



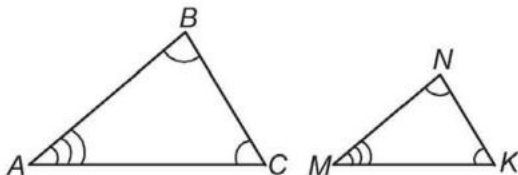
Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой l , если эта прямая l проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна ему. Каждая точка прямой l считается симметричной самой себе.



Центральная симметрия

Точки B и B_1 называются симметричными относительно точки O , если O – середина отрезка BB_1 . Точка O считается симметричной самой себе.

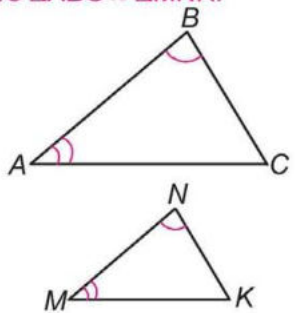
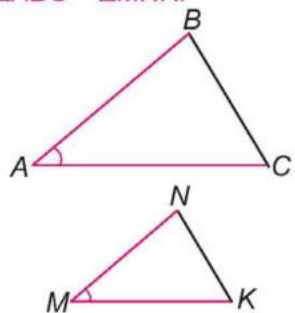
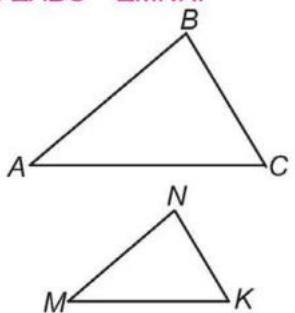
Подобные треугольники



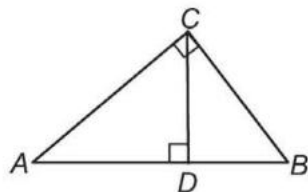
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Если $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$, $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK}$, то $\triangle ABC \sim \triangle MNK$

Признаки подобия треугольников

I признак (по двум углам)	II признак (по двум сторонам и углу между ними)	III признак (по трем сторонам)
Если $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, то $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. 	Если $\angle A = \angle M$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$, то $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. 	Если $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK}$, то $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. 

Отрезок XY называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) между отрезками AB и CD , если $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$.

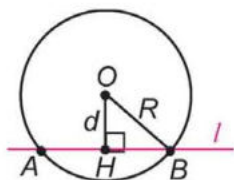


- 1) Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой. $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.
- 2) Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.
 $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$; $BC = \sqrt{AB \cdot DB}$.

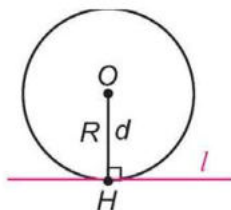
Касательная к окружности

Взаимное расположение прямой на плоскости

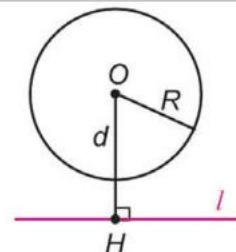
R – радиус окружности; d – расстояние от центра окружности до прямой.



Если $d < R$, то окружность и прямая пересекаются. Имеют 2 общих точки.



Если $d = R$, то окружность и прямая касаются. Имеют 1 общую точку.

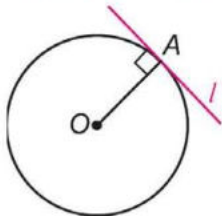


Если $d > R$, то окружность и прямая не пересекаются. Не имеют общих точек.

Свойство касательной к окружности

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

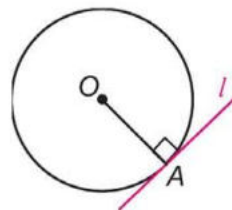
Если l – касательная, A – точка касания, то $OA \perp l$.

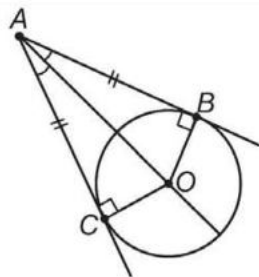


Признак касательной к окружности

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

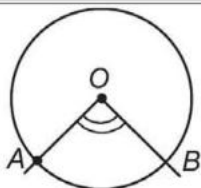
Если $OA \cap l = A$ и $OA \perp l$, то l – касательная.





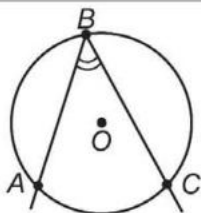
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Если AB, AC – касательные, то $AB=AC$, $\angle BAO=\angle CAO$.



Угол, вершина которого лежит в центре окружности, а стороны пересекают ее, называется **центральный** углом.

$\angle AOB$ – центральный, $\angle AOB = \angle AB$.

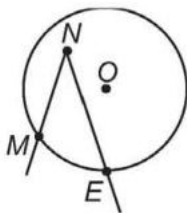


Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее, называется **вписанным** углом.

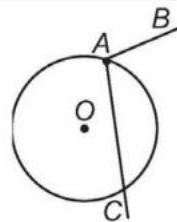
То есть для того чтобы утверждать, что угол вписан в окружность, необходимо, чтобы выполнялись оба условия:

- 1) вершина лежит на окружности;
- 2) стороны угла пересекают окружность.

- 1) $N \notin \text{Окр}(O; R)$
 - 2) $MN \cap \text{Окр.}(O; R)$ и $NE \cap \text{Окр.}(O; R)$
- $\angle MNE$ – не является вписанным углом

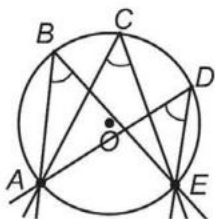


- 1) $A \in \text{Окр}(O; R)$
 - 2) $AC \cap \text{Окр.}(O; R)$ и $AB \not\cap \text{Окр.}(O; R)$
- $\angle BAC$ – не является вписанным углом

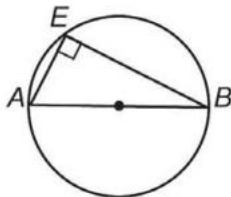


Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

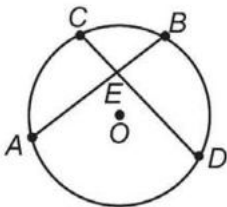
Свойства вписанных углов



- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
 $\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE$

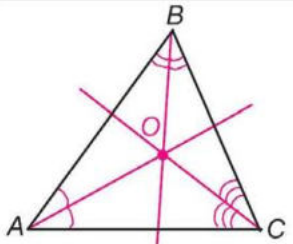
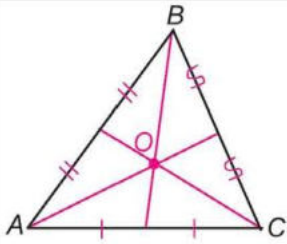
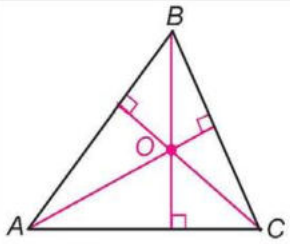
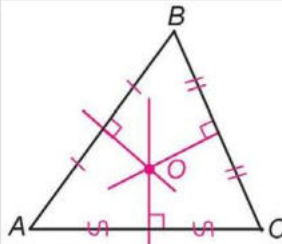


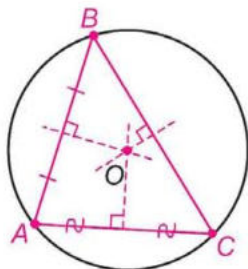
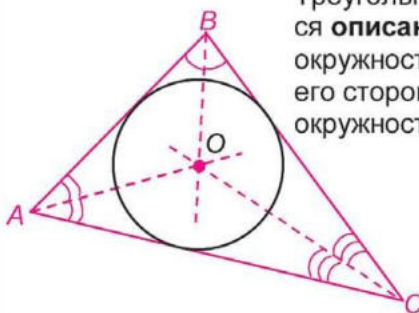
- вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой.
Если AB – диаметр окружности, то $\angle AEB = 90^\circ$



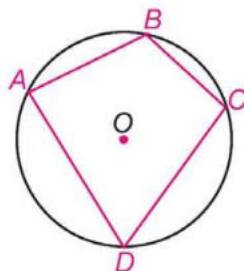
- Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.
Если $AB \cap CD = E$, то $AE \cdot EB = CE \cdot ED$

Четыре замечательные точки треугольника

 Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке	 Медианы треугольника пересекаются в одной точке	 Высоты треугольника пересекаются в одной точке	 Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке.
--	--	--	---

Треугольник, вписанный в окружность	Треугольник, описанный вокруг окружности
 Треугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров.	 Треугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются окружности. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис.

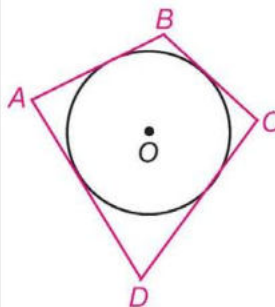
Четырехугольник, вписанный в окружность



Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна 180° .

Если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.
Обратно: если $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, то $ABCD$ – вписанный четырехугольник.

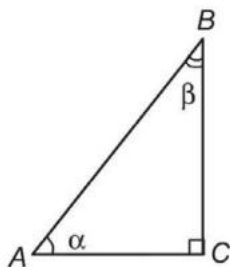
Четырехугольник, описанный вокруг окружности



Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны.

Если $ABCD$ – описанный четырехугольник, то $AB + CD = AD + BC$.
Обратно: если $AB + CD = AD + BC$, то $ABCD$ – описанный четырехугольник.

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника



$$\sin \alpha = \frac{\text{противоположный катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$$

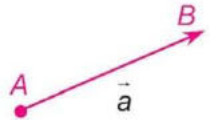
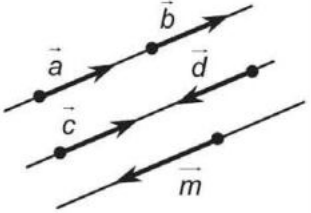
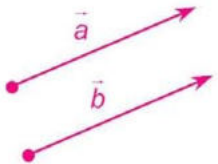
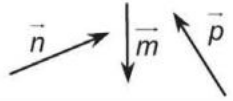
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{противоположный катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin \beta = \frac{AC}{AB}; \quad \cos \beta = \frac{BC}{AB}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{BC}$$

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ – основное тригонометрическое тождество.

Векторы

	Вектор – направленный отрезок. Обозначение $\overline{AB}$ или $\vec{a}$. A – начало вектора, B – конец.
	Нулевой вектор – вектор, начало и конец которого совпадают. Обозначение $\overline{MM}$ или $\vec{0}$.
Длиной вектора (абсолютной величиной вектора) называется длина отрезка. Обозначение $\overline{AB}$ или $\vec{a}$.	
	Коллинеарные векторы – ненулевые векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если коллинеарные векторы направлены в одну сторону относительно прямой, проходящей через их начало, то векторы называются сонаправленными, если в разные стороны – то противоположно направленными.
	$\vec{a} \uparrow \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow \vec{c}$ – сонаправленные, $\vec{c} \downarrow \vec{d}$; $\vec{b} \uparrow \vec{d}$ – противоположно направленные.
	Неколлинеарные векторы

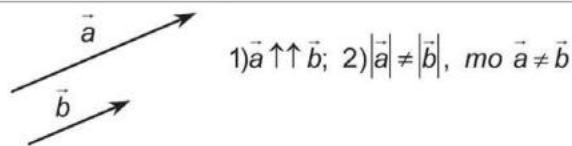
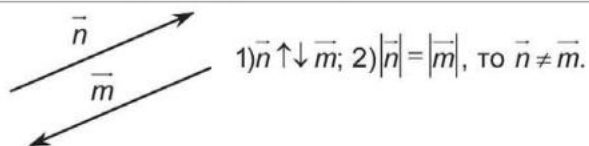
Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Так как $\vec{a} \uparrow \vec{b}$; $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то $\vec{a} = \vec{b}$

Чтобы утверждать, что векторы равны, необходимо, чтобы выполнялись оба условия:

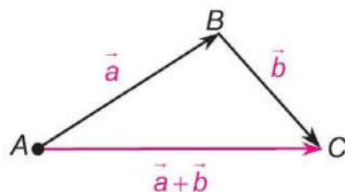
1) векторы сонаправлены;

2) длины их равны.



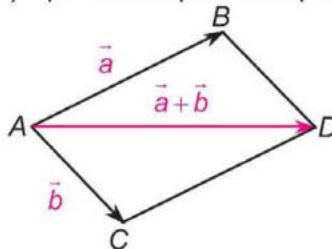
Сложение и вычитание векторов

1) Правило треугольника



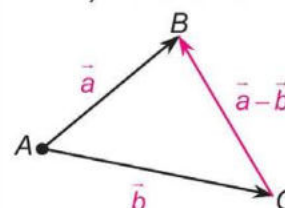
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

2) Правило параллелограмма



$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$$

3) Вычитание



$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$$

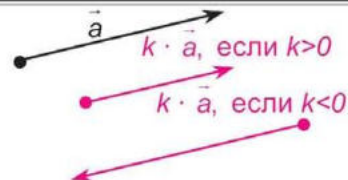
Умножение вектора на число

Произведение ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k

называется такой **вектор** $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$;

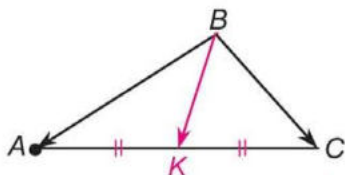
если $k > 0$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$;

если $k < 0$, то $\vec{a} \downarrow \vec{b}$.

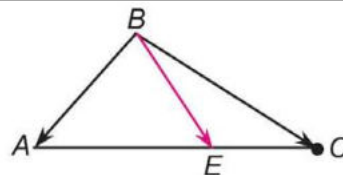


Законы сложения и умножения векторов

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – переместительный закон
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – сочетательный закон
- 3) $(kl)\vec{a} = k \cdot (l\vec{a}) = l \cdot (k\vec{a})$ – сочетательный закон
- 4) $(k + l)\vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a}$ – I распределительный закон
- 5) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – II распределительный закон



Если K – середина AC , то $\vec{BK} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$

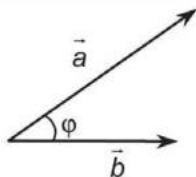


Если $Ab : bC = m : n$, то $\vec{BE} = \frac{n}{m+n}\vec{BA} + \frac{m}{m+n}\vec{BC}$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$



Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\varphi = 90^\circ$, то есть $\vec{a} \perp \vec{b}$.

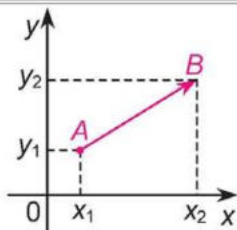
Если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то φ – острый.

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то φ – тупой.

Свойства скалярного произведения для любых $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k .

- 1) $\vec{a}^2 \geq 0$
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – переместительный
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ – распределительный
- 4) $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ – сочетательный

Метод координат



$\overrightarrow{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ – координаты вектора

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Если $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$, то

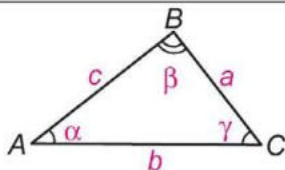
- 1) $\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$
- 2) $\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$
- 3) $k\vec{a} \{kx_1; ky_1\}$
- 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)$

$$5) \cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример: $\vec{a} \{-1; 2\}$; $\vec{b} \{0; -3\}$.

- 1) $\vec{a} + \vec{b} \{-1 + 0; 2 - 3\} = \{-1; -1\}$
- 2) $\vec{a} - \vec{b} \{-1 - 0; 2 - (-3)\} = \{-1; 5\}$
- 3) $5\vec{a} \{5 \cdot (-1); 5 \cdot 2\} = \{-5; 10\}$
- 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} \{-1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3)\} = 0 - 6 = -6.$
- 5) $\cos \varphi = \frac{-1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{0 + 9}} = \frac{-6}{3\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0,$
значит $\varphi > 90^\circ$.



• **Площадь треугольника** $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

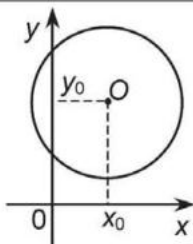
• **Теорема синусов:** стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \quad R - \text{радиус описанной окружности}$$

• **Теорема косинусов:** квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Уравнение окружности



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

(x_0, y_0) – координаты центра окружности, R – радиус.

Если центр окружности лежит в начале системы координат, то уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение прямой

$ax + by + c = 0$, где a, b, c – числа.

$y = 0$ – уравнение оси абсцисс.

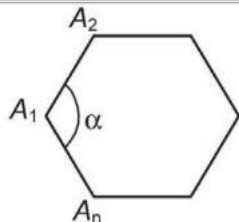
$x = 0$ – уравнение оси ординат.

$y = d$ – уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

$x = d$ – уравнение прямой, параллельной оси ординат.

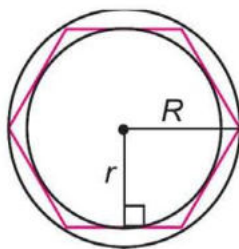
Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны и все углы равны.



$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 180^\circ \cdot (n - 2) \text{ — сумма всех углов } n\text{-угольника.}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n} \text{ — величина угла правильного } n\text{-угольника.}$$



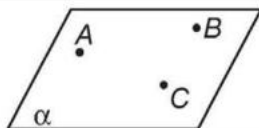
$S = \frac{1}{2} P \cdot r$ — площадь правильного n -угольника равна половине произведения периметра n -угольника на радиус окружности, вписанной в n -угольник.

$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ — сторона правильного многоугольника через радиус окружности, описанной около правильного многоугольника.

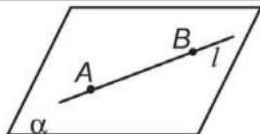
$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Правильный n -угольник	R	r	P	S
Треугольник a_3	$R = \frac{a_3 \sqrt{3}}{3}$	$r = \frac{a_3 \sqrt{3}}{6}$	$P_3 = 3a_3$	$S_3 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
Квадрат a_4	$R = \frac{a_4 \sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{a_4}{2}$	$P_4 = 4a_4$	$S_4 = a^2$
Шестиугольник a_6	$R = a_6$	$r = \frac{a_6 \sqrt{3}}{2}$	$P_6 = 6a_6$	$S_6 = \frac{a^2 3 \sqrt{3}}{2}$

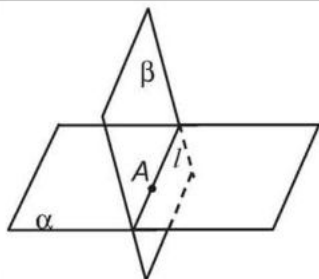
Аксиомы стереометрии



1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
 Если $A, B, C \notin l$, то $\exists \alpha$, что $A, B, C \in \alpha$, причем α – единственная.

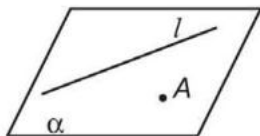


2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки этой прямой лежат в данной плоскости.
 Если $A, B \in l$; $A, B \in \alpha$, то $l \subset \alpha$.

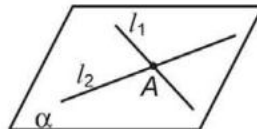


3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
 Если $A \in \alpha$, $A \in \beta$, то $\alpha \cap \beta = l$, где $A \in l$.

Существование плоскости

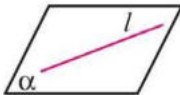
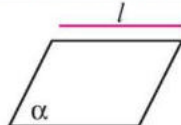
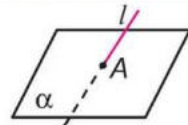
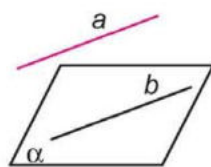
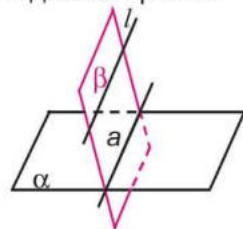
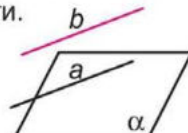


1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

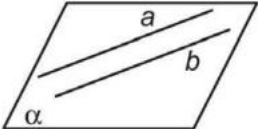
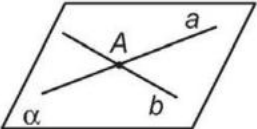
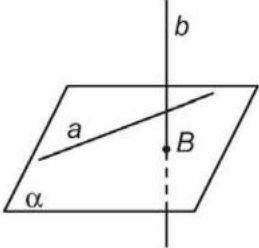
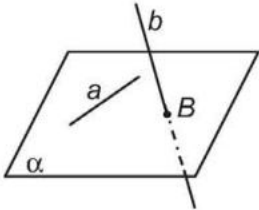
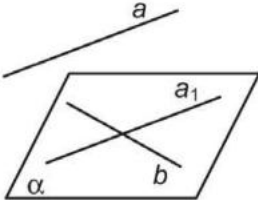


2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

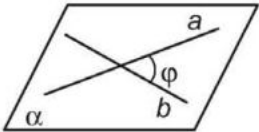
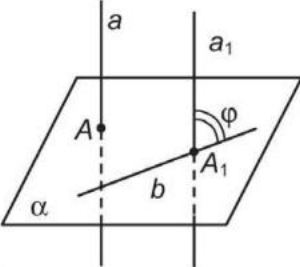
Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

		
1. Прямая лежит в плоскости. $l \subset \alpha$	2. Прямая и плоскость не имеют общих точек, то есть прямая параллельна плоскости. $l \parallel \alpha$	3. Прямая и плоскость имеют одну общую точку, то есть прямая пересекает плоскость. $l \cap \alpha = A$
Признак параллельности прямой и плоскости Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости. Если $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \parallel b$, то $a \parallel \alpha$. 		Свойства 1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Если $l \parallel \alpha$, $l \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = a$, то $l \parallel a$.  2. Если одна из параллельных прямых лежит на данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости. Если $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$, то $b \parallel \alpha$, или $b \subset \alpha$. 

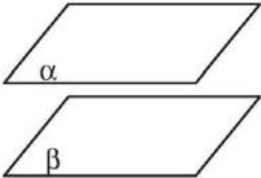
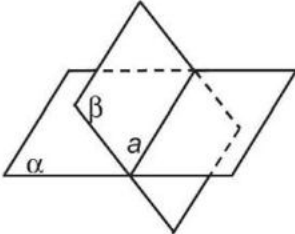
Взаимное расположение прямых в пространстве

		
Две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то есть a и b параллельные прямые. $a \parallel b$	Две прямые лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку, то есть a и b пересекающиеся прямые. $a \cap b$	Две прямые не лежат в одной плоскости, то есть a и b скрещивающиеся прямые. $a \times b$
Признак скрещивающихся прямых		Теорема о скрещивающихся прямых
Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся. Если $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = B$, $B \notin a$, то a, b – скрещивающиеся. 		Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Если $a \times b$, то $\exists \alpha. b \subset \alpha$ и $\alpha \parallel a$ причем α – единственная. 

Угол между прямыми

	Если a и b лежат в одной плоскости и пересекаются, то образуется 4 неразвернутых угла. Угол $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ называется углом между прямыми a и b.
	Если a и b скрещивающиеся прямые, то через произвольную точку $A_1 \in b$ проведем прямую a_1 параллельную a, тогда $\angle(a, b) = \angle(a_1, b) = \varphi$

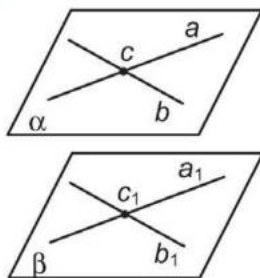
Параллельность плоскостей

	
Две плоскости не имеют общих точек, то есть плоскости α и β параллельны. $\alpha \parallel \beta$	Две плоскости имеют общие точки, то есть плоскости α и β пересекаются. $\alpha \cap \beta = a$

Признак параллельности плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

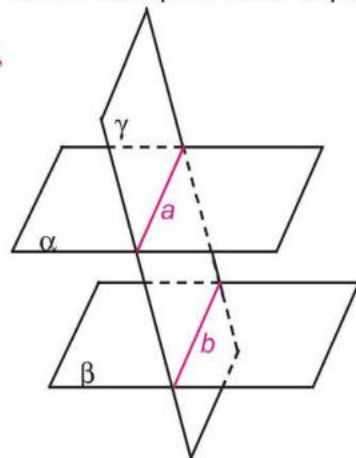
Если $a, b \subset \alpha$, $a \cap b = c$,
 $a_1, b_1 \subset \beta$, $a_1 \cap b_1 = c_1$,
 $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, то $\alpha \parallel \beta$



Свойства параллельных плоскостей

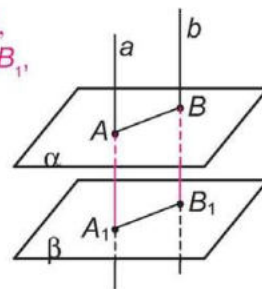
1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Если $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$,
 $\gamma \cap \beta = b$, то $a \parallel b$.

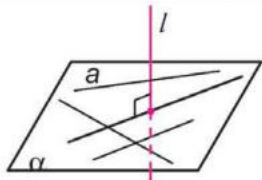


2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Если $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$,
 $b \cap \alpha = B$, $a \cap \beta = A_1$, $b \cap \beta = B_1$,
то $AA_1 = BB_1$.



Перпендикулярность прямой и плоскости

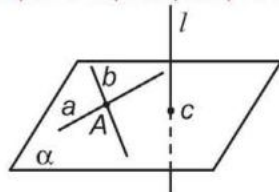


Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

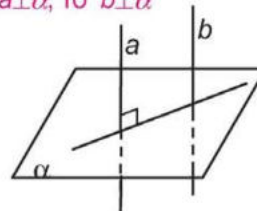
Если $a, b \subset \alpha$, $a \cap b = A$, $l \perp a$, $l \perp b$, то $l \perp \alpha$



Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью к плоскости

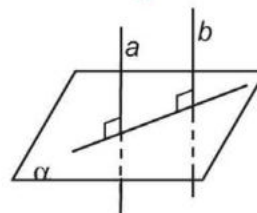
1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Если $a \parallel b$, $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$

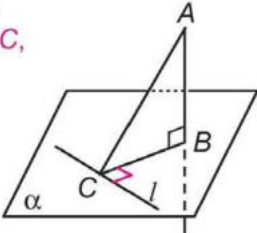
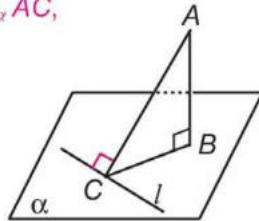


2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

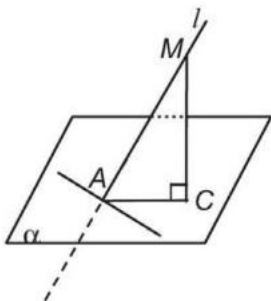
Если $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.



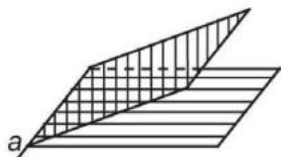
Теорема о трех перпендикулярах

Прямая	Обратная
Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой плоскости. Если $AB \perp \alpha$, $BC = \text{пр}_\alpha AC$, $l \perp BC$, то $l \perp AC$. 	Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции. Если $AB \perp \alpha$, $BC = \text{пр}_\alpha AC$, $l \perp AC$, то $l \perp BC$. 

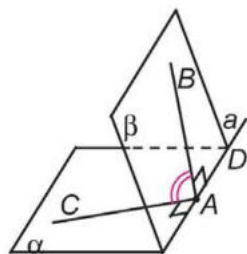
Угол между прямой и плоскостью

	Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.
Если l – прямая, α – плоскость, $MC \perp \alpha$, $AC = \text{пр}_\alpha l$, то $\angle MAC$ – угол между прямой l и плоскостью α.	

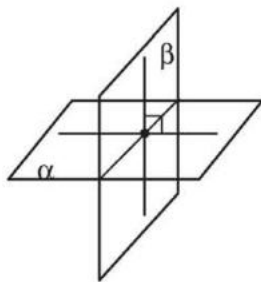
Двугранный угол



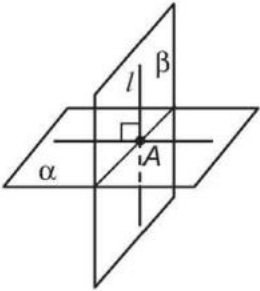
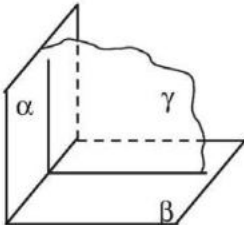
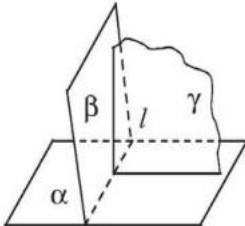
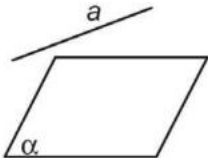
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости.



Если $BA \perp a$, $AB \subset \beta$, $CA \perp a$, $AC \subset \alpha$, то $\angle BAC$ – линейный угол двугранного угла $BADC$.

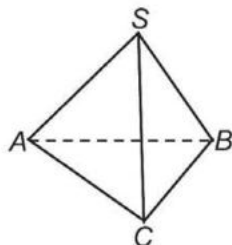


Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

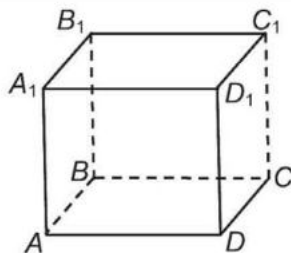
Признак перпендикулярности плоскостей	Следствия
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны. Если $l \subset \beta$, $l \perp \alpha$, $l \cap \alpha = A$ $\downarrow$ то $\alpha \perp \beta$ 	Прямая, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей. Если $\alpha \cap \beta = a$ $\frac{\gamma \perp a}{\downarrow}$ то $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$ 
Прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости, также перпендикулярна этой плоскости. Если $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, то $\alpha \perp \beta$ 	Через любую прямую a, не перпендикулярную к плоскости α, можно провести плоскость β, перпендикулярную α, и притом только одну. Если $a \not\perp \alpha$, $a \not\subset \alpha$, то $\exists \beta: a \subset \beta, \beta \perp \alpha$ и β – единственная 

Многогранники

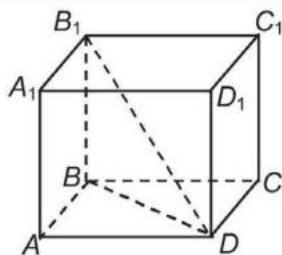
Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, называют **многогранником**.



Тетраэдр – многогранник, составленный из 4 треугольников. Правильный тетраэдр – все грани правильные треугольники.



Многогранник, составленный из двух равных параллелограммов, лежащих в параллельных плоскостях, и четырех параллелограммов, называется **параллелепипедом**. Обозначение: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$



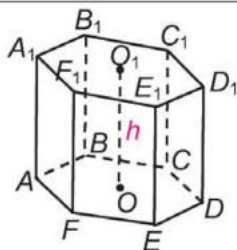
Параллелепипед называется **прямоугольным**, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания – прямоугольники.

Свойства параллелепипеда

1. Противоположные грани параллельны и равны.
2. Диагонали пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$B_1D^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$$

Призма



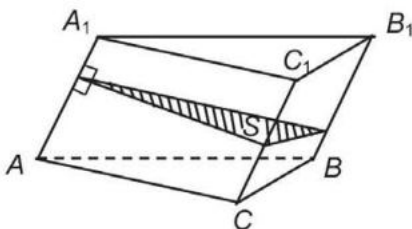
Многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется **призмой**.

Равные многоугольники – основания призмы.
 n параллелограммы – боковые грани призмы.
 стороны параллелограммов — ребра призмы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**.

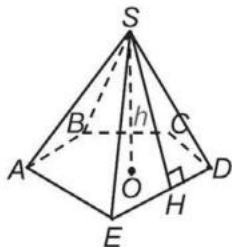
Прямая призма называется **правильной**, если ее основания – правильные многоугольники.

$$S_{\text{бок. пов.}} = m \cdot h; S_{\text{полн. пов.}} = S_{\text{бок. пов.}} + 2S_{\text{осн.}}; V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$



Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

$$V = S_{\text{сеч.}} \cdot AA_1$$



Многогранник, составленный из n -угольника и n треугольников, называется **пирамидой**.

$SO \perp (ABCE)$ – высота пирамиды; n -угольник – основание; треугольники – боковые грани.

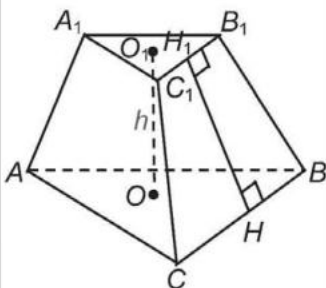
Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты пирамиды – центр вписанной (или описанной) в многоугольник окружности.

$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SH$, где SH – апофема, высота боковой грани правильной пирамиды.

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot r$, где r – радиус вписанной окружности.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot K$$



Усеченная пирамида – часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

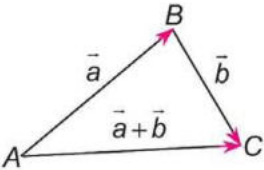
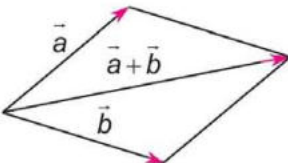
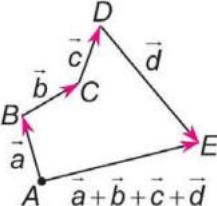
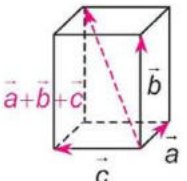
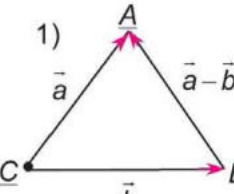
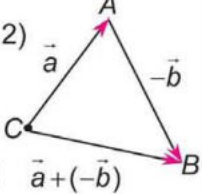
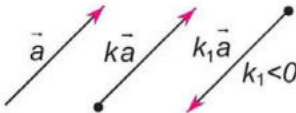
$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot HH_1$, где m_1 и m_2 – периметры оснований;

HH_1 – высота боковой грани правильной усеченной пирамиды;

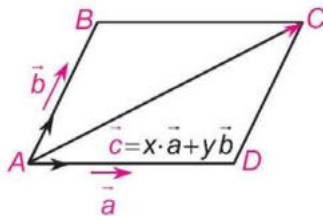
$V = \frac{1}{3} K \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$, где S_1 и S_2 – площади оснований;

$h = OO_1$ – высота усеченной пирамиды.

Сложение векторов

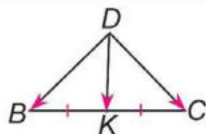
Правило треугольника	Правило параллелограмма	Правило многоугольника
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$	 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон)	 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
Сложение векторов Правило параллелепипеда	Вычитание векторов	Умножение векторов на число
	1)  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ 2)  $\vec{a} + (-\vec{b})$	 $k_1 < 0$ Свойства: 1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон) 2. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

Компланарные векторы – векторы, имеющие равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

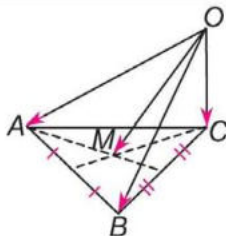


Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x, y – числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны.

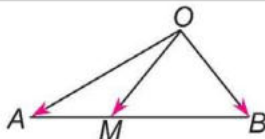
Свойства векторов



$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$, где K – середина отрезка BC ,
 a – произвольная точка пространства.



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где M – точка пересечения медиан $\triangle ABC$,
 O – произвольная точка пространства.

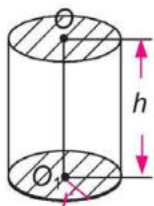


O – произвольная точка пространства, если $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$,
где $\lambda \neq -1$, то $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$

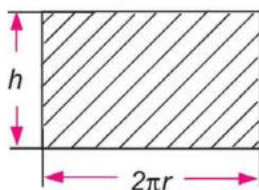
Метод координат в пространстве

Координаты вектора $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$ $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$ $\alpha \vec{a} \{ \alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1 \}$	Координаты середины отрезка $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ C – середина AB $C \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$ $\overline{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$
Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинарные векторы, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$ соответствующие координаты пропорциональны. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны, то любой вектор можно выразить через два других. $\vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \begin{cases} x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3 \\ y_1 = \alpha y_2 + \beta y_3 \\ z_1 = \alpha z_2 + \beta z_3 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \\ \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\} \\ \vec{c} \{x_3; y_3; z_3\} \end{cases}$	
Длина вектора $ \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ где } A(x_1; y_1; z_1); B(x_2; y_2; z_2)$ или $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ где } \vec{a} \{x; y; z\}.$	
Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos(\widehat{a, b})$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ $\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$	Свойства скалярного произведения $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон)

Цилиндр



$$\begin{aligned} S_{\text{бн}} &= 2\pi rh \\ S_{\text{пн}} &= 2\pi(r+h) \\ V &= S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h \end{aligned}$$

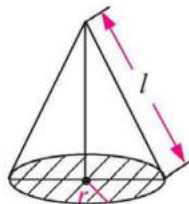


Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами, называется **цилиндром**.

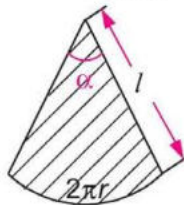
Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Развертка – прямоугольник.

Конус



$$\begin{aligned} S_{\text{бн}} &= \pi r l \\ S_{\text{пн}} &= \pi(l+r) \\ V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ S_{\text{бок}} &= \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \alpha \end{aligned}$$

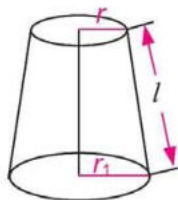


Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, с границей, называется **конусом**.

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Развертка – круговой сектор.

Усеченный конус



Усеченный конус – часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

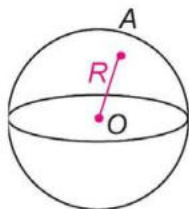
Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бн}} = \pi(r + r_1)l$$

$$V = \frac{1}{3}K(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}); S \text{ и } S_1 - \text{площади оснований.}$$

$$\text{или } V = \frac{1}{3}\pi K(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1)$$

Сфера



Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра.

$S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности сферы.

Уравнение сферы

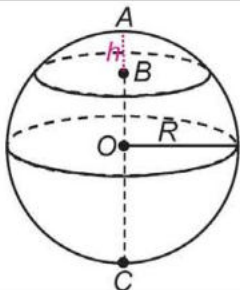
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты центра сферы,

$(x; y; z)$ – координаты точки сферы, R – радиус сферы.

Если центр сферы совпадает с началом системы отсчета, то уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

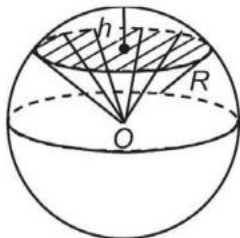
Шар – тело, ограниченное сферой. $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$.



Шаровой сегмент – часть шара, отсекаемая от него плоскостью. AB и BC – высоты получившихся сегментов.

$$V_c = \pi h^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3} h \right), \text{ где } R - \text{радиус шара, } h - \text{высота сегмента.}$$

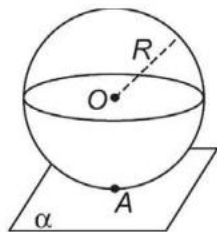
Шаровой слой – часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.



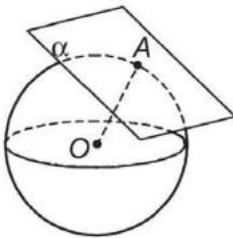
Шаровой сектор – тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90° , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 K.$$

Касательная к сфере

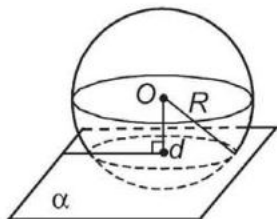


Плоскость, имеющая со сферой одну общую точку, называется **касательной** к сфере, а их общая точка – **точкой касания** плоскости и сферы.

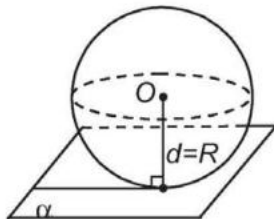
Свойство касательной к сфере	Признак касательной к сфере
Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Если α – касательная, A – точка касания, то $OA \perp \alpha$. 	Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере. Если $A \in \alpha$, $OA = R$, $OA \perp \alpha$, то α – касательная к сфере.

Взаимное расположение сферы и плоскости в пространстве

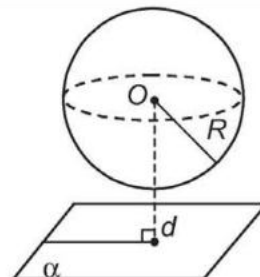
d – расстояние от центра до плоскости; R – радиус сферы



$d < R$, сфера и плоскость имеют много общих точек, т.е. пересекаются по окружности

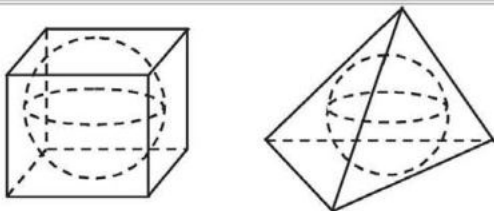


$d = R$, сфера и плоскость имеют одну общую точку, т.е. плоскость касается сферы

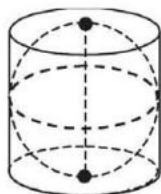


$d > R$, сфера и плоскость не имеют общих точек, т.е. плоскость и сфера не пересекаются

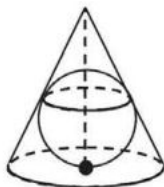
Сфера, вписанная в многогранник, цилиндр и конус



Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней.

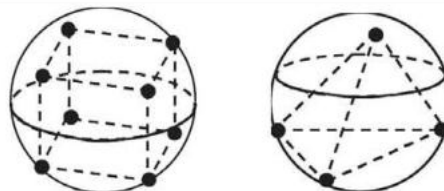


Сфера вписана в цилиндр, если она касается оснований и боковой поверхности.

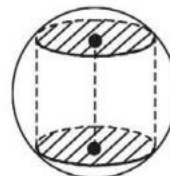


Сфера вписана в конус, если она касается конической поверхности и основания.

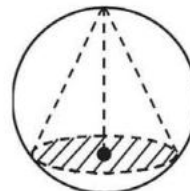
Сфера, описанная вокруг многогранника, цилиндра, конуса



Сфера описана вокруг многогранника, если все вершины его лежат на сфере.



Сфера описана вокруг цилиндра, если его основания являются сечением сферы.



Сфера описана вокруг конуса, если вершина лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы.